Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

17 de enero de 2011

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

I. Algebra lineal

1.1 Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en el conjunto $\{0, 1\}$, que tiene exactamente dos unos en cada columna y dos unos es cada renglón. Dar condiciones necesarias y suficientes para que el rango de A sea n.

1.2 Sean A,B matrices $n \times m$ y $m \times n$ respectivamente. Si $AB = I_n$ y $BA = I_m$ probar que $n = m$. Donde I_k es la matriz identidad de tamaño $k \times k$.

1.3 Sea A una matriz $n \times n$ sobre un campo k, cuyos valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Sea E_{λ_i} es el espacio propio de λ_i, para $i = 1, \ldots, m$. Probar que si

$$\sum_{i=1}^{m} dim(E_{\lambda_i}) = n$$

entonces existe una matriz P tal que PAP^{-1} es una matriz diagonal.

2. Cálculo

2.1 Probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

no converge.

2.2 Sea h una función continua y g una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \int_0^{g(x)} h(t)dt.$$

2.3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = |xy|^{\frac{1}{2}}$. Probar que f no es diferenciable en $(0,0)$

3. Problemas opcionales

3.1 Si $f(x) = x^3 - x$, probar que $f(n)$ es un multiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3.2 Sea A un compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ una funcion continua. Probar que f toma un valor máximo y un valor mínimo en A.

3.3 Dar un ejemplo de una función continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Justifique.

3.4 Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} e^{it} cos(e^{it})dt.$$