



# CONFERENCIAS GENERALES DE MATEMÁTICAS

3<sup>er</sup> COLOQUIO  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.PN

“La Trinidad”. Tlaxcala, México  
8 al 26 de Agosto de 1983

## PATROCINADORES

Subsecretaría de Educación Superior e Inveestigación Científica, S.E.P  
Subsecretaría de Educación e Inveestigación, S.E.P  
Dirección adjunta de Desarrollo Científico, CONACyT  
Instituto Politécnico Nacional  
Cenntro de Investigación y de Eestudios Avanzados del I.P.N.



# CONFERENCIAS GENERALES DE MATEMATICAS

**3<sup>er</sup> COLOQUIO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN**

**"La Trinidad", Tlaxcala, México  
8 al 26 de Agosto de 1983**

## **PATROCINADORES**

**Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica, S.E.P.**

**Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica, S.E.P.**

**Dirección Arjunta de Desarrollo Científico, CONACyT**

**Instituto Politécnico Nacional**

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.**

LAS PRESENTES NOTAS FUERON ELABORADAS PARA UN CURSO QUE SE IMPARTIO DURANTE EL 3<sup>er</sup> COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS DEL CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL Y SU EDICION CONSTA DE 500 EJEMPLARES.

CONTINUAMOS, ASI, CON LA LABOR DESARROLLADA DURANTE EL PRIMERO Y SEGUNDO COLOQUIA Y ESPERAMOS QUE LAS SUGERENCIAS DE LOS PARTICIPANTES DE LOS CURSOS Y LOS LECTORES DE LAS NOTAS, PERMITAN QUE ESTAS EVOLUCIONEN HACIA UN TEXTO DE UTILIDAD PARA PROFESORES Y ESTUDIANTES.

**Dr. Horacio Tapia-Recillas**  
Coordinador del 3<sup>er</sup> Coloquio

## PROLOGO

El 3er. Coloquio del Departamento de Matemáticas se llevó a cabo en La Trinidad, Tlaxcala en Agosto de 1983. Una de las actividades que incluyó fué un ciclo de conferencias generales de Matemáticas. Aquí está el texto de 12 de ellas.

Estas conferencias están dirigidas a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas o a personas con un interés comparable hacia las Matemáticas. Se trata de presentar al lector un poco del material que podría encontrar al continuar estudios de postgrado, aunque en distintas direcciones, con la suficiente precisión, claridad y simplicidad para que pueda aprovechar su lectura. Este provecho puede tener 2 aspectos: el entender y disfrutar los conceptos y resultados expuestos o también el darse cuenta de alguna debilidad en el proceso de su formación como matemático.

¡Ojalá que muchas personas encuentren instructiva y placentera esta lectura!

**José Antonio Vargas M.  
Editor**



## CONJETURA DE SERRE

(en 2 variables)

Prof. Carlos Rentería Márquez  
Depto. de Matemáticas  
de la ESFM-IPN.  
Becario de COFAA.

En la página 243 de su artículo "Faisceaux Algébriques Cohérents" (FAC) Serre escribió: "Uno desconoce si existen  $A$ -módulos proyectivos de tipo finito que no sean libres" (aquí  $A=k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $k$  un campo). Rápidamente esto fué conocido en el mundo matemático como "La Conjetura de Serre". Culminando con casi veinte años de esfuerzo, D. Quillen y A. -- Suslin, demostraron independientemente la conjetura de Serre en enero de 1976.

El propósito de ésta conferencia es dar una demostración (devida a C.S. Seshadri) de la conjetura para el caso de dos variables.

$R$  designará siempre a un anillo conmutativo con 1.

Definición 1. Sea  $P$  un  $R$ -módulo finitamente generado,  $P$  se llama ( $R$ -módulo) proyectivo si para todo morfismo sobre  $f: M \rightarrow N$  de  $R$ -módulos y para todo homomorfismo  $g: P \rightarrow N$  existe un homomorfismo  $h: P \rightarrow M$  tal que  $g = f \circ h$ .

Es decir, todo diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 h & \swarrow & & \searrow & \\
 M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

con renglón exacto se puede completar a un diagrama conmutativo.

La definición anterior es equivalente con: Existe  $Q$ ,  $R$ -módulo finitamente generado, tal que  $P \oplus Q$  es un  $R$ -módulo libre.

Todo módulo libre es proyectivo y el recíproco es falso, ejem.  $R = \mathbb{Z}_6$ . Entonces  $\mathbb{Z}_2$  es  $R$ -proyectivo pues  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 = R$ , más no es  $R$ -libre pues tiene menos de 6 elementos.

$GL_n(R)$  es el grupo lineal general i.e., las matrices invertibles  $n \times n$  con entradas en  $R$ .

$SL_n(R)$  es el grupo lineal especial, es decir, es el subgrupo de  $GL_n(R)$  de las matrices con determinante 1. Introduzcamos ahora el grupo de matrices elementales que denotaremos

por  $E_n(R)$ . Este es el subgrupo de  $GL_n(R)$  generado por las matrices  $I + re_{ij}$  con  $r \in R$   $i \neq j$ .  $I$  la matriz identidad  $n \times n$  y  $e_{ij}$  la matriz con ceros en todas las entradas y 1 en la entrada  $(i, j)$ .

Observe que la matriz inversa de  $I + re_{ij}$  es  $I - re_{ij}$  y que  $I + re_{ij}$  pertenece a  $SL_n(R)$   $\forall r \in R$ , por tanto  $E_n(R)$  está contenido en  $SL_n(R)$ .

Si  $M$  es una matriz  $n \times n$  con entradas en  $R$ , la matriz  $(I + re_{ij})M$  se obtiene de  $M$  multiplicando el  $j$ -renglón de  $M$  por  $r$  y sumando esto al  $i$ -renglón de  $M$ . Análogamente, la matriz  $M(I + re_{ij})$  se obtiene de  $M$  multiplicando la  $i$ -columna de  $M$  por  $r$  y sumando esto a la  $j$ -columna de  $M$ .

La gran ventaja que tiene  $E_n(R)$  es que si  $\phi: R \rightarrow S$  es un morfismo sobre de anillos, entonces el homomorfismo inducido  $E_n(R) \rightarrow E_n(S)$  (tal que  $I + re_{ij} \rightarrow I + \phi(r)e_{ij}$ ) es también suprayectivo aunque puede suceder que los homomorfismos inducidos  $GL_n(R) \rightarrow GL_n(S)$  y  $SL_n(R) \rightarrow SL_n(S)$  no lo sean!

Hacemos actuar a  $E_n(R)$  sobre los renglones de longitud  $n$  de  $R$  (=matrices  $1 \times n$ , entradas en  $R$ ) y definimos una relación de equivalencia como sigue:

$(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n)$  sí y solo si existe  $A \in E_n(R)$  tal que  $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) A$ .

Definición 2.

Decimos que un renglón  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $R$  es unimodular de longitud  $n$  si

$$R = Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n.$$

Denotemos por  $Un_n(R)$  al conjunto de renglones unimodulares de  $R$  de longitud  $n$ .

Proposición 1. Para  $a$  y  $b$  elementos de  $R$  se cumple que  $(\dots, a, \dots, b, \dots) \sim (\dots, b, \dots, -a, \dots)$ .

NOTA: Aquí,  $(\dots, a, \dots, b, \dots)$  es el renglón de longitud  $n$  de  $R$  con ceros en todas las entradas excepto quizá en las que aparecen  $a$  y  $b$ .

Demostración. Digamos que  $a$  está en la columna  $i$  y  $b$  en la  $j$ .

Entonces  $(\dots, a, \dots, b, \dots) = (\dots, b, \dots, -a, \dots) E$ , donde  $E$  es la matriz  $n \times n$  con  $-1$  en  $(i, j)$ ,  $1$  en  $(j, i)$  y  $1$  en  $(k, k) \forall k, i \neq j, k \neq i, k \neq j$  y ceros en cualquier otra entrada distinta a las anteriores,  $E$  pertenece a  $E_n(R)$  pues:

$$(I + e_{ij})(I - e_{ji})E(I - e_{ji}) = I.$$

Proposición 2. Si  $(b_1, \dots, b_n) \in \text{Un}_n(R)$  contiene un subenglón unimodular de longitud menor que  $n$ , entonces

$$(b_1, \dots, b_n) \sim (1, 0, \dots, 0).$$

Demostración. Digamos que  $(b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) \in \text{Un}_m(R)$  es subenglón unimodular de longitud  $m$  menor que  $n$ , y sea  $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ . Pongamos  $b_{i_1} a_{i_1} + \dots + b_{i_m} a_{i_m} = 1$ , efectuando transformaciones elementales podemos cambiar  $b_i$  por

$$b_i - (b_{i_1} a_{i_1} + \dots + b_{i_m} a_{i_m}) (b_i^{-1}) = 1$$

luego  $(b_1, \dots, b_n) \sim (b_1, \dots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \dots, b_n)$  y ahora transformaciones elementales obvias llevarán las  $b_j$  a 0 para  $j \neq i$ , luego  $(b_1, \dots, b_n) \sim (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Aplicando la proposición 1 obtenemos la afirmación.

Proposición 3. Si  $R$  es un dominio Euclideanó. Entonces

1) Para  $n \geq 2$  y todo  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Un}_n(R)$ , se cumple que

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (1, 0, \dots, 0).$$

2)  $\text{SL}_n(R) = \text{E}_n(R)$ .

Demostración. (1) Sea  $d_i = \text{m.c.d.}\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$   $i \geq 2$  con

$d_1 = a_1$  así que

$$d_i = \text{m.c.d.}\{d_{i-1}, a_i\} \quad i \geq 2;$$



con  $M' \in \text{SL}_{n-1}(R)$  y aplicando inducción sobre  $n$  se termina la demostración.

Sean  $k$  un campo,  $R=k[x]$ ,  $A=k[x,y]$ .

$$A = \{b_0 + b_1 y + \dots + b_n y^n \mid n \in \mathbb{N}, b_i \in R \quad i=0, \dots, n\}$$

$S=R-(0)$  ( $S$  es un conjunto multiplicativo)

si  $f(x) \in S$  es un polinomio irreducible, entonces

$$\frac{A}{f(x)A} = \frac{R}{(f(x))} [y],$$

el cual es un dominio Euclideano, por la proposición 3, (2) se cumple que

$$\text{SL}_n(A/f(x)A) = \text{E}_n(A/f(x)A).$$

Si  $P$  es un  $A$ -módulo proyectivo finitamente generado, consideremos la localización de  $P$  en  $S$  es decir:

$P_S = \{\frac{z}{b} \mid z \in P, b \in S\}$  donde  $\frac{z}{b} = \frac{w}{c}$  sí y solo si existe  $d \in S$  tal que  $d(cz - bw) = 0$ , en virtud de que  $P$  es proyectivo, la igualdad

$$a \cdot x = 0 \text{ con } x \in P \text{ y } a \in A-(0) \text{ implica } x=0 \text{ por}$$

tanto es equivalente a decir que  $\frac{z}{b} = \frac{w}{c}$  sí y solo si  $cz = b \cdot w$ .

En particular,

$$A_S = \left\{ \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n}{b} \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R, b \in S \right\},$$

es decir,  $A_S = k(x)[y]$  con  $k(x)$  el campo de cocientes de  $R$ , por tanto  $A_S$  es un anillo Euclideo, y en particular, un dominio de ideales principales (=D.I.P.). Como  $P_S$  es un  $A_S$ -módulo proyectivo finitamente generado, entonces  $P_S$  es  $A_S$ -libre.

Teorema. (Conjetura de Serre, caso de 2 variables). Sean  $k$  y  $A$  como antes. Entonces todo  $A$ -módulo proyectivo finitamente generado es  $A$ -libre.

Demostración. La aplicación  $P \rightarrow P_S, z \mapsto \frac{z}{1}$  es un monomorfismo. Así que podemos suponer que  $P \subseteq P_S$ .

Como  $P_S$  es  $A_S$ -libre digamos de rango  $n$ , sean  $f_1, f_2, \dots, f_n \in P$  tales que forman una  $A_S$ -base de  $P_S$  y consideremos el  $A$ -módulo libre  $L = Af_1 + \dots + Af_n \subseteq P$ ; ya que  $P$  es finitamente generado, -- entonces existe  $a \in S$  tal que  $a \cdot P \subseteq L \subseteq P \dots (*)$ .

Como  $P$  es un  $A$ -módulo Noetheriano, existe un  $A$ -submódulo libre  $L$  de  $P$  que es máximo dentro de la familia de todos los submódulos  $A$ -libres de  $P$  que satisfacen (\*). También como  $A$  es un anillo Noetheriano, existe  $a \in S$  tal que  $aA$  es un ideal máximo dentro de la familia de ideales  $rA, r \in S$  tales que  $r \cdot P \subseteq L \subseteq P$ .

El objetivo es demostrar que  $a$  es unidad de  $R$  lo cual implica que  $P=L$ .

Supóngase que  $a$  no es unidad, entonces  $a = b \cdot c$  con  $b, c \in S$

y  $b$  polinomio irreducible (recuerde que  $S=R-(0)$  y  $R=k[x]$ ); es claro que  $aA \subseteq cA$  (pues  $b$  es irreducible) y por la selección de  $a$  se cumple que  $c \cdot P \not\subseteq L$ . Sea  $z \in P$  tal que  $c \cdot z \notin L$  luego  $b(c \cdot z) \notin b \cdot L$  pero  $bc \cdot z = a \cdot zeL \cap bP$  por tanto  $b \cdot L \not\subseteq L \cap b \cdot P$ . Consideremos el homomorfismo  $\bar{g}: L/b \cdot L \rightarrow P/b \cdot P$ ,  $\bar{g}(\bar{\ell}) = b \cdot P + \ell$ , su núcleo es

$$(L \cap b \cdot P) / b \cdot L \neq 0.$$

Como  $A/bA = (R/b)[y]$  es un D.I.P. y  $P/bP$  es  $A/bA$ -libre, entonces  $\text{Im}(\bar{g})$  es  $A/bA$ -libre, así que  $\text{nucl}(\bar{g})$  es sumando directo (libre) de  $L/bL$ . Elijanse  $e_1, \dots, e_n$  en  $L$  tales que  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  sean base de  $L/bL$  y  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$  ( $m \leq n$ ) sean base de  $\text{nucl}(\bar{g})$ . Si  $f_1, \dots, f_n$  es una  $A$ -base de  $L$  (observe que  $\forall i f_i \notin bL$ ), consideremos el automorfismo de  $L/bL$   $\bar{\alpha}$  inducido por  $\bar{\alpha}(\bar{f}_i) = \bar{e}_i$   $i=1, \dots, n$ , multiplicando por un escalar si es necesario podemos suponer que  $\det(\bar{\alpha})=1$ , como

$$SL_n(A/b \cdot A) = E_n(A/bA),$$

existe  $\alpha \in E_n(A)$  tal que, módulo  $bA$  es  $\bar{\alpha}$ , pongamos  $\alpha(f_i) = e_i'$   $i=1, \dots, n$ , y  $e_1', \dots, e_n'$  es otra base de  $L$  y  $\bar{e}_i' = \bar{\alpha}(\bar{f}_i) = \bar{e}_i$  para toda  $i$ , en particular  $\bar{e}_i' \in \text{nucl}(\bar{g}) = (L \cap b \cdot P) / b \cdot L$ , es decir,  $e_i' = b \cdot e_i''$  para algún  $e_i'' \in P-L$ , considere el  $A$ -módulo libre  $L' = A \cdot e_1'' + A e_2'' + \dots + A e_n''$ ,  $L' \subseteq P$  y además  $L \not\subseteq L'$ , y de  $aP \subseteq L \subseteq P$  se sigue que  $aP \subseteq L' \subseteq P$ , lo que contradice la selección de  $L$ . Esta contradicción demuestra el teorema.

REFERENCIAS.

J.P. Serre, Faisceaux Algébriques Cohérents,  
Ann. Math. 61 (1955), 191-278.

C.S. Seshadri, Triviality of vector bundles over  
the affine space  $k^2$ , Proc. National  
Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958), 456-458.

T.Y. Lam, Serre's Conjecture, Lectures Notes  
In Math, N° 635, Springer-Verlag.

# TOPOLOGIA DIFERENCIAL

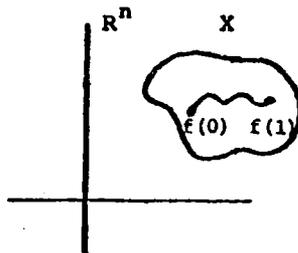
Dr. Samuel Gitler

Departamento de Matemáticas  
CINVESTAV - IPN

Para fijar un poco las ideas, consideremos  $\mathbb{R}^n$  el espacio euclídeano de dimensión  $n$ , que consta de  $(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{R}$ , los reales.

Un sistema fundamental de vecindades del punto  $p = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  lo forman los paralelepípedos  $\{|x_i - x_i^0| < \varepsilon_i\} = R(p, \varepsilon_i)$ . Dado un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , lo topologizamos al tomar como sistema fundamental de vecindades para  $p \in X$ ,  $\{R(p, \varepsilon_i) \cap X\}$ .

Sea  $X$  un espacio topológico. Una trayectoria en  $X$  es una función continua  $f: I \rightarrow X$ , donde  $I$  es el intervalo  $[0, 1]$ . A  $f(0)$  se le llama punto inicial de la trayectoria y a  $f(1)$  punto final.

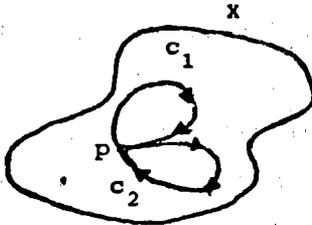


Dividimos a  $X$  en clases de equivalencia. Decimos que  $p \sim q$  si existe trayectoria en  $X$  con punto inicial  $p$  y punto final  $q$ . Esta relación es fácil ver que es una relación de equivalencia, y nos descompone a  $X$  en subconjuntos ajenos, llamados componentes por trayectorias de  $X$ . Designamos por  $\pi_0(X)$  el conjunto de componentes por trayectorias de  $X$ .

Sea  $\Omega_p X$  el espacio de trayectorias en  $X$  con punto inicial y punto final  $p$ . Definimos:

$$\pi_1(X, p) = \pi_0(\Omega_p X)$$

El espacio  $\Omega_p X$  se conoce como el espacio de lazos en  $X$  basado en  $p$ . Podemos componer lazos



y así  $\pi_0(\Omega_p X)$  adquiere una estructura algebraica: con la composición de lazos,  $\pi_0(\Omega_p X) = \pi_1(X, p)$  es un grupo, el llamado grupo fundamental de  $X$ , considerado por Poincaré a principios de siglo. Si iteramos este proceso, poniendo  $\bar{p}$  = lazo constante en  $p$ , podemos definir:

\*Aquí hago trampa, pues el espacio  $\Omega_p X$  no es conjunto de  $\mathbb{R}^k$  y tiene una topología más complicada.

$$\pi_2(X, p) = \pi_1(\Omega_p X, \bar{p}) = \pi_0(\Omega_p \Omega_p X)$$

y así en forma inductiva, podemos definir

$$\pi_n(X, p)$$

los llamados grupos de homotopía de  $X$  basados en  $p$ . Estos son abelianos para  $n \geq 2$ , y fueron introducidos por W. Hurewicz en 1930.

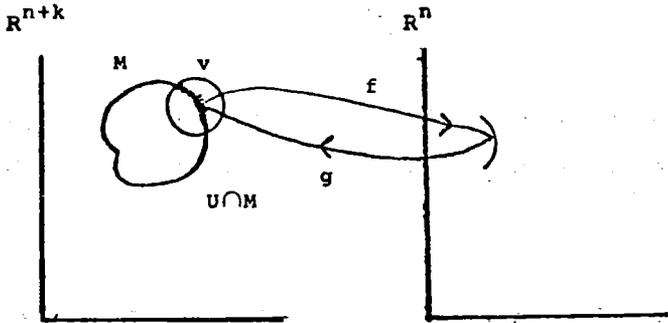
Hurewicz tuvo una trágica muerte en Yucatán en 1956, al caerse de una pirámide, después de asistir a una de las conferencias de topología más importantes y que se celebró en la Ciudad de México.

Estos grupos son muy difíciles de calcular, y han dado origen a un gran número de trabajos de investigación.

Si  $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  es la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es fácil ver que  $\pi_n(X, p) \neq 0$  si existe  $f: S^n \rightarrow X$  con  $f(1, 0, \dots, 0) = p$  y tal que  $f(S^n)$  no puede deformarse en forma continua a  $p$ . En este caso decimos que  $f$  es esencial.

En 1931, H. Hopf construyó por primera vez una transformación esencial  $f: S^p \rightarrow S^q$  con  $p > q$ , tomando  $p=3$  y  $q=2$ . Más adelante hablaré de este ejemplo.

Un subconjunto  $M^n$  de  $R^{n+k}$  es variedad de dimensión  $n$ , si todo punto  $p \in M^n$  tiene una vecindad  $U \cap M^n = V$  homeomorfa a un abierto de  $R^n$  (unión de vecindades fundamentales).



Por lo anterior, quiero decir que existen

$$f: U \cap M^n \rightarrow f(U \cap M^n) \subset R^n$$

y

$$g: f(U \cap M^n) \rightarrow U \cap M^n$$

donde  $f(U \cap M^n)$  es un abierto en  $R^n$ ,  $f$  y  $g$  son continuas y además

$$g \circ f = \text{identidad en } U \cap M^n,$$

$$f \circ g = \text{identidad en } f(U \cap M^n)$$

$g$  se llama inversa de  $f$  y se denota por  $f^{-1}$

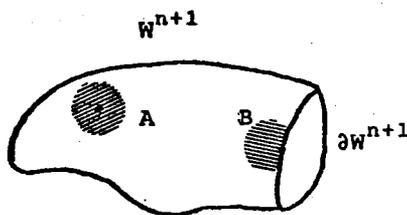
Decimos que la variedad es diferenciable si además cumple la siguiente condición: Si  $f':(U' \cap M^n) \rightarrow f'(U' \cap M^n) \subset \mathbb{R}^n$  es otra vecindad y  $f'$  es homeomorfismo, entonces

$$f'f^{-1}:f(U \cap U' \cap M^n) \rightarrow f'(U \cap U' \cap M^n),$$

que es transformación de abierto de  $\mathbb{R}^n$  en abierto en  $\mathbb{R}^n$ , es función infinitamente diferenciable.

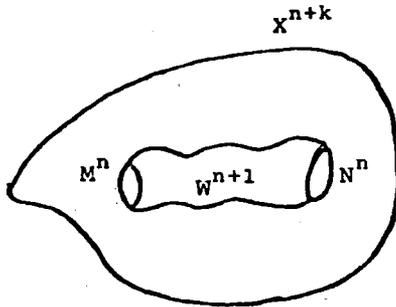
Poincaré trató de generalizar  $\pi_1(X, p)$  al considerar subvariedades de una variedad.

Una variedad  $W^{n+1}$  con frontera  $\partial W^{n+1}$  puede describirse como en el siguiente diagrama:



Donde A y B son los tipos de vecindades que hay en  $W^{n+1}$ . Más precisamente, si  $p$  es punto interior de  $W^{n+1}$ , es decir en  $W^{n+1} - \partial W^{n+1}$ ,  $p$  tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^{n+1}$  y si  $p \in \partial W^{n+1}$ ,  $p$  tiene una vecindad homeomorfa al semiplano  $H_{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ con } x_{n+1} \geq 0\}$ .

Dada una variedad  $X^{n+k}$ , podemos definir una relación de equivalencia entre subvariedades de  $X^{n+k}$  de dimensión  $n$ , como sigue. Dos subvariedades de  $X^{n+k}$ ,  $M^n$  y  $N^n$  son equivalentes, si existe  $W^{n+1}$  subvariedad de  $X^{n+k}$  con frontera la unión ajena de  $M$  y  $N$



Estas clases de equivalencia forman un grupo abeliano  $H_n(X)$  y Poincaré había creído tener una relación de dualidad entre  $H_n(X)$  y  $H_k(X)$ , la llamada dualidad de Poincaré.

Otro famoso matemático, Heegard encontró un error en la argumentación de Poincaré. Esto dió origen a que Poincaré tratara en forma mas abstracta a las variedades y que diera origen a los complejos celulares y a la teoría de homología entre ellos, pero olvidando un poco su idea inicial de considerar subvariedades en variedades.

Steenrod, otro gran matemático de este siglo, y del cual tuve la fortuna de ser alumno, en 1947 se preguntaba, ¿cómo

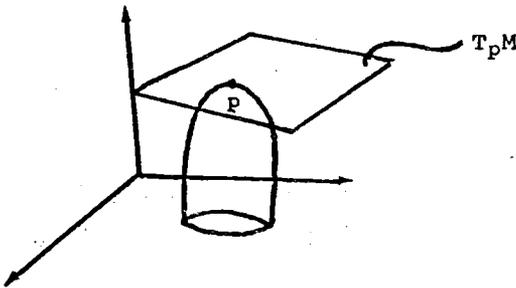
se puede decidir de una manera efectiva si una variedad cerrada  $M^n$  es frontera?

René Thom, otro de los grandes matemáticos del siglo XX, redescubrió las ideas de Poincaré y en 1954 resolvió este problema, creando técnicas y otros problemas que han dado un fecundo impulso a la investigación en topología.

En 1945, Pontryagin había encontrado una relación muy importante entre transformación entre variedades y homotopía.

Para describirla, necesitamos definir más estructuras.

Sea  $M^n$  una variedad diferenciable en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Sea  $T_p M$  el espacio lineal de dimensión  $n$  que más se aproxima a  $M$  en el punto  $p$ .



Si

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

podemos dar a  $TM$  una estructura de variedad de dimensión  $2n$ . Además si  $U_0$  es vecindad coordenada en  $M$

$$TM|_{U_0} \cong U_0 \times \mathbb{R}^n$$

donde  $\cong$  significa homeomorfismo. En palabras, la variedad tangente es localmente un producto.

En forma análoga podemos hablar de la variedad normal  $N(M)$  donde el espacio  $N_p(M)$  es perpendicular a  $T_p(M)$  en  $\mathbb{R}^{n+k}$  y así  $N(M)$  es de dimensión  $k$ . Resulta que  $N(M)$  es variedad de dimensión  $n+k$  también se tiene que  $N(M)$  es localmente un producto, es decir  $N(M)|_{U_0} \cong U_0 \times \mathbb{R}^k$ .

Decimos que  $M$  es establemente paralelizable si  $N(M)$  es globalmente un producto, es decir  $N(M) \cong M \times \mathbb{R}^k$ , para  $k > n$ .

Pontryagin consideró tripletas  $(M^n, \phi, f)$  donde  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  es transformación continua,  $M^n$  es establemente paralelizable y  $\phi: N(M) \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$  es un homeomorfismo lineal fijo con la siguiente relación de equivalencia:

$(M^n, \phi, f) \sim (N^n, \phi', f')$  si existe  $(W^{n+1}, \psi, F)$  donde

$$\partial W^{n+1} = (M \text{ unión ajena con } N)$$

$$\psi: N(W^{n+1}) \rightarrow W^{n+1} \times \mathbb{R}^k$$

un homeomorfismo lineal, y

$$F: W^{n+1} \rightarrow X$$

tales que

$$\psi|_M = \phi, \quad \psi|_N = \phi',$$

$$F|_M = f, \quad F|_N = f'$$

Las clases de equivalencia forman un grupo  $\Omega_n^{fr}(X)$  que está muy relacionado con  $\pi_n(X)$ . De hecho  $\Omega_n^{fr}(X)$  es el n-grupo de homotopía estable de  $X$ , (el cual se puede definir como sigue: Dado un espacio  $X$  con punto base  $x_0$ , definimos  $\Sigma X$ , suspensión de  $X$  como el espacio que se obtiene de  $X \times I$  al identificar a un punto  $(x \times 0) \cup (x \times 1) \cup (x_0 \times I)$ . Es fácil ver que  $\Sigma S^n \sim S^{n+1}$ .

y que  $S^n \rightarrow X$  induce  $S^{n+1} \rightarrow \Sigma X$ . Esto da

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(\Sigma X, \bar{x}_0)$$

homomorfismo y si  $X$  es un espacio decente, como lo son las variedades lisas, existe  $N$  tal que  $\pi_{n+k}(\Sigma^k X, \bar{x}_0)$  se identifican con

$$\pi_{n+k+1}(\Sigma^{k+1} X, \bar{x}_0) \text{ si } k > N.$$

Esta relación fundamental nos permite pasar de topología algebraica, a topología diferencial y viceversa.

Quiero terminar dando dos resultados muy importantes, cuyas demostraciones no son más pero que les darán un poco del sabor de los argumentos que se utilizan.

El primero es un resultado de Brouwer.

Sea  $f: X \rightarrow X$  una transformación continua. Decimos que  $f$  tiene un punto fijo si existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ .  
Sea  $D^n$  el disco unitario en  $R^n$

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$$

Teorema de Brouwer. Toda transformación continua del disco

en el disco,  $f: D^n \rightarrow D^n$  tiene un punto fijo.

El argumento a continuación es debido a Hirsch, según notas de Milnor.

Lema. No existe  $f: M \rightarrow \partial M$  diferenciable tal que  
 $f|_{\partial M} = \text{identidad}$ .

Supongamos que sí existe  $f$  y sea  $p \in \partial M$  valor regular de  $f$ . Entonces  $f^{-1}(p)$  es variedad diferenciable de dimensión 1. Ahora  $p$  es también valor regular de  $f|_{\partial M} = \text{identidad}$ , por lo que

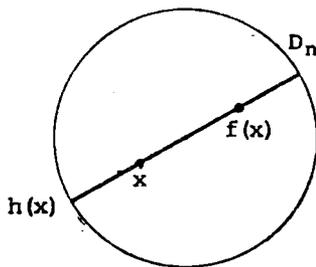
$$\partial f^{-1}(p) = f^{-1}(p) \cap \partial M = p$$

Pero  $f^{-1}(y)$  es compacto y se demuestra que las únicas variedades diferenciables, compactas de dimensión 1 son unión ajena de un número finito de círculos y segmentos, pero entonces  $\partial f^{-1}(p)$  tiene un número par de puntos. Esto es una contradicción a la existencia de  $f$ .

Corolario. Toda transformación diferenciable  $f: D^n \rightarrow D^n$  tiene un punto fijo.

En efecto, si  $f$  no tiene punto fijo, definimos  $h: D^n \rightarrow S^{n-1}$  como sigue: Consideremos el segmento que va de  $x$  a  $f(x)$

y lo extendemos hasta que corte a  $S^{n-1}$ , y ponemos  $h(x)$  = punto en  $S^{n-1}$  más cercano a  $x$  en la recta que une  $x$  con  $f(x)$ .



Es fácil ver que  $h(x)$  es diferenciable y que  $h: D^n \rightarrow S^{n-1}$  es tal que  $h|_{S^{n-1}} = \text{identidad}$ . Esta contradicción nos da que  $f$  debe tener un punto fijo. Finalmente tenemos para  $f: D^n \rightarrow D^n$  continua que podemos aproximarla por funciones diferenciables.

Dado  $\epsilon > 0$ , el teorema de aproximación de Weierstrass dice que existe un polinomio  $P$  tal que  $\|f(x) - P(x)\| < \epsilon$ . Si ponemos  $P_1(x) = \frac{P(x)}{1+\epsilon}$ ,  $P_1(x): D^n \rightarrow D^n$  es diferenciable. Si ahora  $f(x) \neq x$  para toda  $x \in D^n$ , entonces  $\|f(x) - x\|$  tiene un mínimo  $\mu > 0$ .

Si hacemos  $\epsilon$  tal que  $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu$ , entonces  $P_1(x)$  tampoco puede tener un punto fijo. En efecto, si  $P_1(x) = x$ , tendríamos  $\|x - f(x)\| = \|P_1(x) - x + x - f(x)\| = \|P_1(x) - f(x)\| \geq \mu$

Pero como  $P_1(x)$  es diferenciable, hay una contradicción, lo que establece el resultado de Brouwer.

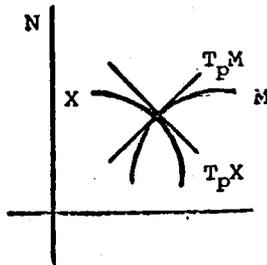
Una generalización tremendamente importante de valor regular, es debida a Thom y apareció en nuestro Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana en 1956.

Transversalidad: Sean  $f: M^m \rightarrow N^n$  diferenciable y  $X^q$  subvariedad de  $N^n$ . Decimos que  $f$  es transversa a  $X^q$ , si para todo  $p \in f^{-1}(X^q)$  tenemos:

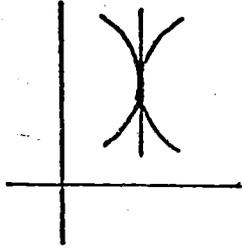
$$df(T_p M) + T_{f(p)} X = T_{f(p)} N$$

es decir, la imagen del espacio tangente a  $M$  en el punto  $p$  y el espacio tangente a  $f(p)$  en  $X$  generan el espacio tangente a  $f(p)$  en  $N$ .

Ejemplo de intersección transversal:



de intersección no transversal



En el caso en que  $x^q$  es un punto,  $T_{f(p)}x^q = 0$  y obtenemos que  $df$  es sobre, es decir que  $f(p)$  es valor regular.

Lo importante de esta noción es que

- 1)  $f^{-1}(x^q)$  es subvariedad de dimensión  $m-n+q$  en  $M^m$
- 2) Dados  $f: M^m \rightarrow N^n$  diferenciable,  $x^q$  subvariedad de  $N^n$ , y  $\epsilon > 0$ , existe  $g$  diferenciable con  $|f-g| < \epsilon$  tal que  $g$  es transversal a  $x^q$ .

Veamos ahora el ejemplo de las transformaciones

$$f: S^3 \rightarrow S^2.$$

Si  $f$  es una tal y  $p$  y  $q$  son valores regulares de  $f$ , entonces  $f^{-1}(p)$ ,  $f^{-1}(q)$  son variedades cerradas de dimensión 1, es decir, son uniones finitas ajenas de círculos. Para cada uno de estos círculos  $C$  en  $f^{-1}(p)$ , sea  $D$  un 2-disco en  $S^3$  con  $\partial D = C$ . Hacemos transversal  $D$  a  $f^{-1}(q)$ . Así  $D \cap f^{-1}(q)$  consta de un número finito de puntos.

Escogemos una orientación para  $T(S^3)$ , es decir, tenemos dada una base para  $T_x(S^3)$  que varía constantemente con  $x$ .

Si ahora  $x \in D \cap f^{-1}(q)$ , nos fijamos en la base que se obtiene para  $T_x(S^3)$  al tomar una base para  $T_x(D)$  seguida de una base para  $T_x(f^{-1}(q))$ . Ponemos  $s(x) = 1$  si la base así obtenida puede transformarse en la base escogida por medio de una transformación no singular de determinante positivo. En caso contrario, ponemos  $s(x) = -1$ . Ahora definimos:

$$H(f) = \int s(x),$$

donde la suma varía sobre todos los puntos en  $\cup(D_\alpha \cap f^{-1}(q))$  con las  $D_\alpha$  discos, uno por cada círculo en  $f^{-1}(p)$ .

Se demuestra que  $H(f)$  solo depende de la clase de homotopía de  $f$  en  $\pi_3(S^2)$  y que  $H(f) = 0$  si  $f$  es nul-homotópica.

Construimos ahora una  $f: S^3 \rightarrow S^2$  con  $H(f) = 1$  como sigue:

Consideramos a  $S^3$  como la esfera unitaria en  $\mathbb{C}^2$ , es decir,  $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\}$  y a  $S^2$  como las clases de equivalencia  $[z_1, z_2]$  con  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} - (0, 0)$ , con relación  $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$  si y sólo si existe  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  con  $z'_i = \lambda z_i$ .

Entonces  $f: S^3 \rightarrow S^2$  viene dada por  $f(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ ,  $f^{-1}(p)$  y  $f^{-1}(q)$  constan de un solo círculo y es fácil ver que  $H(f) = 1$ . Luego por lo anterior,  $f$  es esencial.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Antoniano, E. y Gitler, S. Topología Diferencial. Publicaciones del I Coloquio del Departamento de Matemáticas, Centro de Investigación del I.P.N. Oaxtepec, Morelos. Agosto de 1979.
- [2] Guillemin, V. y Pollack. Differential Topology. New Jersey: Prentice Hall, 1974.
- [3] Hirsch, M.W. Notes on Differential Topology. Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1973.
- [4] Milnor, J. Topology from a Differential Viewpoint. University of Virginia Press, 1965.
- [5] Pontryagin, L. Smooth Manifolds and their Applications in Homotopy Theory. Amer. Math. Society Translations, Series 2, II(1959) 1-14.
- [6] Spivak, M. Calculus on Manifolds. New York: Benjamin, 1965.



## APLICACIONES DE INTERVALO

Pedro Armendáriz Morales

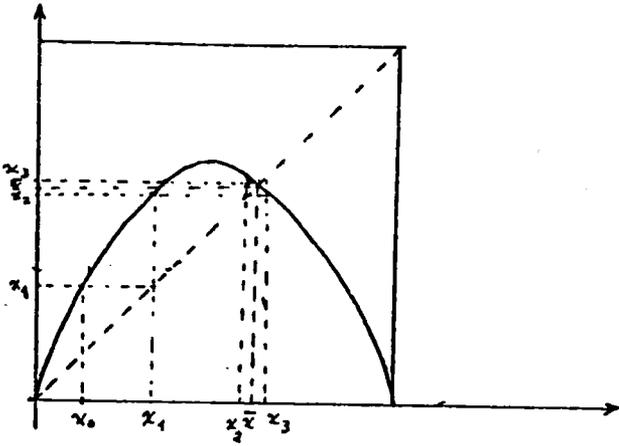
Tiempo atrás un amigo me decía que conocemos muy poco de las funciones, aún de las de una variable, excepto quizá las transformaciones lineales y de estas podemos decir algo si podemos responder a cuestiones relativas a sus valores propios.

En esta plática trataré de explicar que se conoce y desconoce de funciones de un intervalo cerrado en sí mismo, las que llamaremos aplicaciones y cuyo estudio está muy en voga principalmente por parte de científicos no matemáticos, por el gran número de usos que han encontrado de ellas.

Un modelo muy conocido en dinámica de poblaciones es el propuesto por Verhulst en el siglo pasado, en el cual la dinámica de una población  $u(t)$  es regida por la ecuación diferencial  $\dot{u} = au - bu^2$  que bajo el cambio de variable  $x = bu/a$  se convierte en  $\dot{x} = ax(1 - x)$ . Su contrapartida discreta es el estudio de la aplicación  $f(x) = ax(1 - x)$ , si  $f(x)$  nos da la población digamos cada año y al  $n$ -ésimo año tenemos una población  $x_n$ , al año siguiente tendremos la población  $x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n)$ . Pero, ¿qué sucede con  $x_n$  cuando  $n$  crece?, ¿que tanto depende del valor inicial  $x_0$  y del valor del parámetro  $a$ ?

Examinemos algunos ejemplos más de cerca.

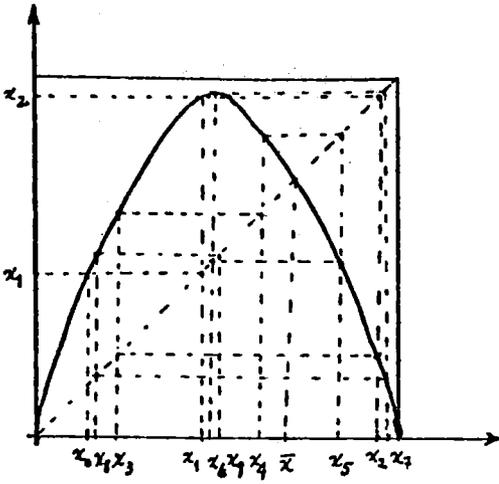
Tenemos de partida la aplicación  $f: I \rightarrow I$  con  $I = [0, 1]$  y  $f(x) = ax(1 - x)$  para  $0 \leq a \leq 4$ , su derivada es  $f'(x) = a(1 - 2x)$  y tiene por tanto un máximo en  $x = 1/2$  con valor  $f(1/2) = a/4$ . Para que tenga un punto fijo aparte del cero, esto es un punto  $x$  para el que  $x = f(x)$  y  $x \neq 0$  necesitamos que  $x = ax(1 - x)$  es decir que  $1 = a(1 - x)$  y como  $x$  está entre 0 y 1 necesitamos que  $a$  sea mayor que uno, y en este caso el punto fijo no cero es  $x = 1 - 1/a$ . Note que  $f'(1 - 1/a) = a(1 - 2(1 - 1/a)) = a(-1 + 2/a) = 2 - a$ .



En la figura de arriba hemos graficado una de estas parábolas y algunos de los iterados de un punto  $x_0$ . Recuerde que para obtener gráficamente los iterados de  $x_0$ , tomamos  $x_0$  en el eje horizontal, y  $x_1$  es la altura de la parábola en el punto  $x_0$ , para encontrar  $x_2$  vamos horizontalmente hasta tocar la diagonal y luego subimos por la vertical hasta la parábola, etc...

Observe que en nuestra gráfica los iterados de  $x_0$ , se acercan cada vez más al punto fijo  $\bar{x}$  esto es debido a que en el ejemplo gráfico  $a < 3$  y por tanto  $|f'(\bar{x})| = |2 - a| < 1$  y si  $y$  es cercano a  $\bar{x}$  como  $f(y) = f(\bar{x}) + (y - \bar{x})f'(\bar{x}) = \bar{x} + (y - \bar{x})f'(\bar{x})$  pues  $\bar{x}$  es fijo, vemos que  $|f(y) - \bar{x}| < |y - \bar{x}|$  es decir  $\bar{x}$  atrae a los puntos cercanos a él y lo llamaremos un atractor. En nuestro caso, ¿ $\bar{x}$  atrae a todos los  $0 < y < 1$ ? Trate de probarlo.

Ahora, si estudiamos la siguiente figura, no vemos ninguna regularidad en la ordenación de los puntos y si comparamos las dos sucesiones siguientes vemos que en ambas no parece haber orden alguno, sin embargo, la primera es una sucesión de números aleatorios y la segunda son los iterados de  $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$  para  $a = 3.87$ ,  $x_0 = .795$



SUCESIONES

.739	.795
.789	.631
.016	.902
.988	.344
.666	.873
.252	.429
.951	.948
.437	.190
.149	.596
.378	.932
.566	.245
.459	.715

Por el argumento contrario al caso del punto fijo atractor, podemos decir que en este caso el punto fijo  $\bar{x}$  repele a los puntos cercanos a él y le llamaremos un repulsor. Pero, ¿qué pasa con las otras, con los iterados de otros puntos? De aquí en adelante a la sucesión de iterados de un punto, le llamaremos la órbita del punto. Nos podemos preguntar si hay órbitas periódicas, es decir, si para alguna órbita  $\{x_n\}$  se cumple que  $x_{n+p} = x_n$  - en caso que  $p$  sea el menor entero positivo para el cual se satisface la igualdad anterior decimos que la órbita ó el punto es de período  $p$ . Por ejemplo un punto  $x$  de período dos es un punto para el cual  $x = f(f(x)) = f(ax(1-x)) = a[ax(1-x)][1-ax(1-x)]$ , ésta es una ecuación de cuarto grado que podemos (?) resolver y ver para que valores de  $a$  la ecuación tiene solución. También nos podemos preguntar si esta órbita  $\{x, f(x)\}$  es atractora ó repulsora, esto es, si y es cercano a  $x$ , es cierto que  $f^2(y), f^4(y), \dots$  están cada vez más cercanos a  $x$  ó más alejados (similarmente para  $f(x)$ ). Por  $f^n$  entendemos aplicar  $f$   $n$ -veces.

Al variar  $a$  de 0 a 4, vimos que si  $a \leq 1$  el único punto fijo de  $f$  es el cero y no es difícil ver que todas las órbitas tienden a él, es un punto fijo atractor; para  $1 < a \leq 3$  vimos también que aparece un nuevo punto fijo  $1 - 1/a$  que es atractor y ahora el cero se convierte en expulsor; para  $a > 3$  el punto fijo  $1 - 1/a$  se convierte en expulsor, a estos valores de  $a$ , 1 y 3 en los cuales al pasar por ellos, cambia radicalmente el comportamiento de la aplicación les llamaremos puntos de bifurcación. ¿Hay otros valores de este tipo?

Nos hemos ido dando cuenta que la dinámica de aplicaciones del intervalo, aún en casos elementales, no es tan simple como a primera vista parece. En lo que sigue daremos un repaso, más o menos histórico, de lo que se conoce del comportamiento de estas aplicaciones y los métodos utilizados en su estudio.

Podemos rastrear el estudio de aplicaciones del intervalo al trabajo hecho por Gauss y posteriormente por Borel, el trabajo de Gauss es sobre

el estudio de las propiedades aritméticas y asintóticas de los "decimales" que intervienen en los desarrollos en fracciones continuas de números de  $[0, 1]$  en base 2 ó 10. Gauss construye una medida invariante para la aplicación  $\phi(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$  es decir la parte fraccionaria de  $1/x$ , como siempre  $[y]$  significa el mayor entero menor que  $y$ .

La medida invariante que él encuentra viene dada por la densidad  $\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}$  lo que significa que

$$\int_a^b \frac{\rho(x)}{1+x} dx = \int_a^b \frac{\rho(\phi(x))}{1+x} dx$$

para cualquier función integrable  $f$  y cualquier  $a$  y  $b$  entre 0 y 1.

La demostración de este hecho no es difícil y puede ser encontrada en el libro de Ja. Sinai "Introduction to Ergodic Theory" ó en las notas sobre Teoría Ergódica de W. Szlenk publicadas por el Departamento de Matemáticas del CIEA.

Siguiendo en la historia, muy posteriormente, encontramos el trabajo de Ulam y von Neumann (BAMS 53-1947) en el cual prueban que la aplicación  $\phi(x) = 4x(1-x)$  tiene una medida invariante con densidad.

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

Más tarde, en los 50's, Renyi estudia la aplicación "lineal"

$$\phi(x) = \{\beta x + \alpha\} = (\beta x + \alpha) - [\beta x + \alpha]$$

y después Parry y Rohlin, generalizando los resultados obtenidos por Gauss.

Esta generalización es la siguiente: Si  $g: [0, 1] \rightarrow [0, m]$  con  $m$  entero mayor que 1 y  $g'(x) > 1$  para todo  $x$  y  $f(x) = \{g(x)\} = g(x) - [g(x)]$ .

Una densidad  $\rho(x)$  debe satisfacer que  $\rho(x_0) = \sum \frac{\rho(x_i)}{g'(x_i)}$

donde la suma es sobre los  $x_i$  con  $f(x_i) = x_0$ , esta ecuación es soluble y además si  $g$  tiene derivadas continuas hasta orden  $r$  entonces  $\rho$  las tiene hasta orden  $r - 1$ .

En los años 20's Birkhoff demostró un teorema muy importante acerca de las aplicaciones  $\phi$  que preservan una medida, en el cual se asegura que para toda función cuyo valor absoluto sea integrable el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\phi^k(x))$$

existe para toda  $x$  en nuestro espacio. Si dada una función arbitraria este límite no depende de la  $x$ , el sistema es llamado ergódico. El que un sistema sea ergódico es de gran importancia física, pues a grandes rasgos nos dice que si  $f$  mide una magnitud física de un sistema digamos microscópico (pensemos en un gas y la presión del gas) podemos definir la magnitud macroscópica a través de promedios. También actualmente la Teoría Ergódica es una rama de las Matemáticas de un gran desarrollo.

Otra manera de definir la ergodicidad de una aplicación  $\phi$  del intervalo en el caso que la medida tenga una densidad  $\rho(x)$  como los casos de arriba es diciendo que si  $A$  es invariante bajo  $\phi$  es decir  $\phi(A) \subset A$  entonces

$$\int_0^1 \chi_A(x) \rho(x) dx = 0 \text{ ó } 1$$

donde  $\chi_A$  es la función característica de  $A$  que se define como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ está en } A \\ 0 & \text{si } x \text{ no está en } A \end{cases}$$

No es difícil construir una medida invariante para una aplicación a tra-

vés de promedios, esto es un teorema de Bogoliubov y Krilov de los años 30's, pero estas medidas tienen muchas veces propiedades no deseadas, nos podemos preguntar acerca de la existencia de una medida invariante bajo la cual nuestro sistema sea ergódico. Un resultado de este tipo con hipótesis muy generales es debido a Lasota que aplicado al caso del intervalo, asegura que la existencia de un punto de período múltiplo de 3 implica la existencia de una medida invariante "buena" que hace al sistema ergódico; además, prueba que casi todo punto es estacionario y a la vez turbulento, donde por estacionario entiende, los puntos para los cuales el límite en el teorema de Birkhoff existe y por turbulento los  $x$  para los cuales el conjunto  $L(x) = \{y \mid \text{hay una subsucesión de } \{\phi^n(x)\} \text{ tendiendo a } y\}$  es infinito.

Ruelle en 1977 encontró que si  $(a-2)^2(a+2) = 16$ , aproximadamente  $a = 3.67857\dots$ , la aplicación  $ax(1-x)$  tiene una medida "buena" (con densidad) invariante, Jacobson en 1978 probó que para un conjunto "perfecto" de  $a$ 's entre 0 y 4 existe la medida y Bowen en 1978 probó que si la trayectoria de  $x = 1/2$  "pega" en un punto periódico repulsivo, existe dicha medida.

En 1975 apareció un artículo de Li y Yorke en el que aseguran que período 3 implica caos (A.M. Monthly 82-1975) aquí entre otras cosas prueban que para aplicaciones como las mencionadas hasta ahora, la existencia de un punto de período 3 implica la existencia de puntos de cualquier período. Este resultado es un caso particular de un teorema de Sharkovskii (1964) en el cual lista los enteros positivos como sigue

$$3, 5, 7, 9, \dots, 3 \cdot 2, 3 \cdot 5, \dots, 3 \cdot 2^2, \dots, \dots, 2^3, 2^2, 2.$$

y el teorema asegura (bajo hipótesis muy generales) que la existencia de un punto de período  $n$  implica la existencia de puntos de todos los períodos que siguen a  $n$  en la lista. Por ejemplo para la aplicación cuadrática  $ax(1-x)$  se puede probar que si  $a \geq 3.57$  entonces hay un punto de

período 3. Posteriormente Stefan demostró de una manera mas simple los resultados de Sharkovskii, dando una generalización de ellos.

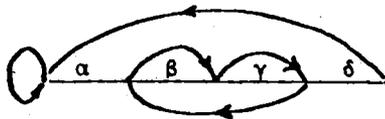
Al año siguiente Smale y Williams publican un trabajo (J. of Math. Biology 1976) donde estudian la aplicación cuadrática  $ax(1-x)$  para  $a = 3.83$  y donde prueban que la órbita de período 3 es el único atractor y el número de puntos de período  $n$  es  $N_n = 1 + F_{n+2} + F_{n-2}$ , donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci.

En su demostración Smale y Williams encuentran ciertos subintervalos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  y ven que parte de  $\alpha$  y  $\delta$  bajo la aplicación van a parar en  $\alpha$ , parte de  $\alpha$  y  $\gamma$  van en  $\beta$  y parte de  $\beta$  y  $\gamma$  van en  $\gamma$ . Esto lo expresan con la siguiente matriz

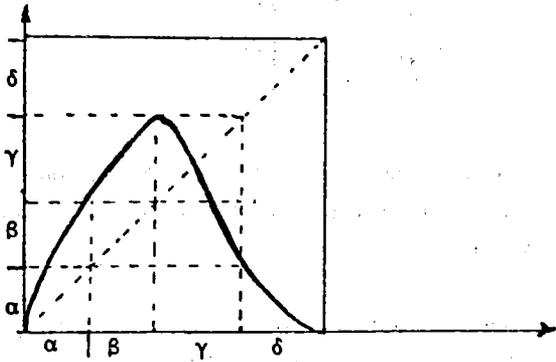
$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{bmatrix}$$

la cual se llamó posteriormente matriz de regiones. Los números de Fibonacci aparecen porque la submatriz entre líneas punteadas generan dichos números.

Piña et al. (Preimpreso de la UAM-I) utilizan también el símbolo

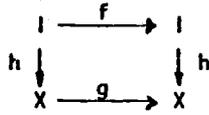


el cual indica la información contenida en la matriz. Un ejemplo de la gráfica de una aplicación tal es



Ellos hacen notar también que la traspuesta de la matriz de Smale-Williams tiene los unos formando una U y que esto sucede en las aplicaciones cuadráticas (parábolas) y en trabajo posterior ven que los unos en la matriz de regiones para las cúbicas es en forma de  $\cup$  como son en cada caso las formas de parábolas y cúbicas.

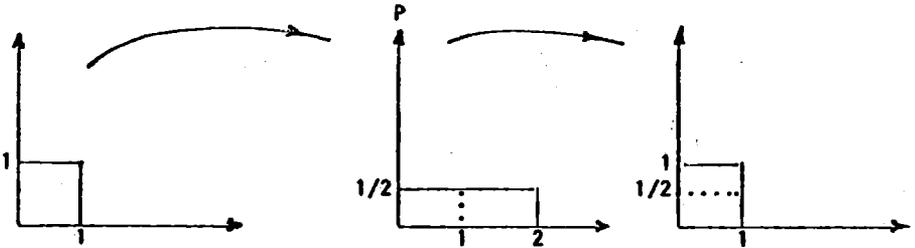
Como en toda actividad humana al tratar de resolver un problema en Matemáticas, siempre tratamos de transformarlo en un problema más simple y si es posible en un problema ya resuelto. Así, hemos visto que podemos "guardar" la información esencial del comportamiento dinámico de una aplicación en una matriz ó en un diagrama con flechas, discretizando en cierto sentido, un problema continuo, pues de hecho es el aspecto discreto el que si podemos manejar. Si en cierta manera podemos trasladar la información de un sistema  $g: X \rightarrow X$  muy conocido ó muy simple de estudiar, a una aplicación  $f: I \rightarrow I$ , habremos resuelto en gran parte el problema de describir la dinámica de  $f$ . La traslación de la información la hacemos por medio de una aplicación  $h$  de  $I$  en  $X$  (ó de  $X$  en  $I$ ) que preserve las propiedades de  $f$  y  $g$  entendiendo por ésto que



es decir  $h \circ f = g \circ h$  en este caso se dice que  $f$  y  $g$  son semiconjugados (conjugados si  $h$  es 1-1) y a  $h$  se le llama una semiconjugación (conjugación si  $h$  es 1-1).

Para ilustrar este aspecto lo haremos por medio de un ejemplo, que aunque saliendonos de las aplicaciones del intervalo es muy sencillo de entender.

Consideremos  $R$  el cuadrado de lados 1 y la transformación de  $R$  en  $R$  que primero aplasta  $R$  en el rectángulo de base 2 y altura  $1/2$ , y luego corta éste a la mitad y la segunda mitad la sobrepone en la primera, como en la siguiente figura.



Esta transformación es llamada del panadero, por que es la acción que efectúa el panadero al amasar el pan. En coordenadas puede expresarse como

$$P(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ (2x - 1, \frac{1}{2}(y+1)) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Note que  $P$  preserva área, pues la primera parte de  $P$  (en la figura) es lineal de determinante 1.

Ahora tomemos el espacio de sucesiones dobles de 0's y 1's que denotaremos por  $\Sigma = \{\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots \mid a_i = 0 \text{ ó } 1\}$  en  $\Sigma$  podemos definir una distancia  $d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^{|n|}}$  y una medida de probabilidad al asignarle a 0 y a 1 el valor de  $1/2$  y tomar el producto. En  $\Sigma$  podemos definir la traslación a la izquierda  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  por medio de  $\sigma(\{a_n\}) = \{b_n\}$  con  $b_n = a_{n+1}$ . No es difícil verificar que  $\sigma$  es continua con inversa continua y que preserva la medida.

Podemos definir  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  por medio de  $h(\{a_n\}) = (x, y)$  con

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{2^{n+1}} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Sin mucha dificultad se puede comprobar que  $h \circ P = \sigma \circ h$  i.e.

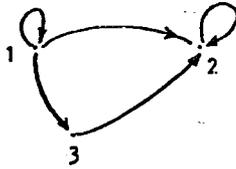
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

note que  $h$  tiene inverso único excepto en los puntos que tienen expresión binaria de dos distintas maneras (colas de 1's) pero este conjunto tiene "área" cero en  $\mathbb{R}$ .

El sistema del espacio de sucesiones es llamado un esquema de Bernoulli por la analogía con el lanzamiento de una moneda.

Hemos reducido el estudio de una transformación "continua" como  $P$  al estudio de una transformación "discreta" como es esquema de Bernoulli. Esto se llama la Dinámica Simbólica de  $P$ , también así al estudio de los esquemas de Bernoulli.

Más generalmente dada una gráfica orientada (red) por ejemplo



y su matriz de incidencia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

Podemos tomar en el espacio  $\Sigma$  de bisucesiones con entradas entre 1 y  $n$  (en este caso 1, 2, 3); únicamente las sucesiones  $\{x_n\}$  que satisfacen

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Así por ejemplo si tenemos que  $x_0 = 3$ ,  $x_1$  tiene que ser 2 pues solo hay flechas de 3 a 2,  $x_2$  y todos los que le siguen deben de ser 2 pues de 2 sólo se puede ir a 2,  $x_{-1} = 1$  pues de 3 sólo se puede venir de 1, etc.

A este conjunto lo llamamos las sucesiones admisibles de  $A$  y lo denotamos por  $\Sigma_A$ , tenemos aquí también la traslación a la izquierda, etc.etc.

En el caso de la aplicación del panadero, tenemos dos símbolos y todas las bisucesiones son admisibles.

El estudio de la Dinámica Simbólica fue introducido por Hadamard (1898) en el estudio de flujos geodésicos, trabajo que fue continuado por Hopf en los 40's. Smale y Williams utilizan la dinámica simbólica en la prueba de lo antes mencionado.

Bowen estudió la dinámica simbólica de las aplicaciones del intervalo y Li y Yorke, en el trabajo mencionado con anterioridad la usan de la siguiente manera: Supongamos que  $f$  es una aplicación continua sobre  $[0, 1]$  y hay un conjunto finito  $S$  con  $f(S) \subset S$  digamos  $S = \{b_0 < b_1 < \dots < b_n\}$ .

Definimos una matriz de transición  $A = (a_{ij})$  por medio de  $a_{ij} = 1$  si  $(f(b_{j-1}), f(b_j)) \supset (b_{i-1}, b_i)$  a una sucesión admisible  $\{x_n\}$  le asociamos el conjunto

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k} [b_{x_{k-1}}, b_{x_k}]$$

Es también de gran interés en el estudio de la dinámica de aplicaciones, encontrar invariantes de conjugación, esto es, números que nos ayuden a decidir si un sistema es o no conjugado a otro. Uno de estos invariantes es la Entropía de una aplicación, este concepto fue tomado de la Teoría de Información de Shannon por Kolmogorov y dos aplicaciones conjugadas tienen la misma entropía aunque no alrevés.

Veamos como se define esto.

Consideremos una aplicación de un cierto espacio en si mismo  $\phi : X \rightarrow X$  que preserve una medida de probabilidad  $p$ .

Dada una partición  $\alpha$  de  $X$  definimos  $h(\alpha) = -\sum_{A \in \alpha} p(A) \ln p(A)$

Dadas dos particiones  $\alpha$  y  $\beta$ , definimos la partición  $\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$ .

Definimos la entropía de  $\phi$  respecto a la partición  $\alpha$  como

$$h(\phi, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(\alpha \vee \phi \alpha \vee \dots \vee \phi^{n-1} \alpha)$$

donde  $\phi^k \alpha = \{\phi^k(A) \mid A \in \alpha\}$

y la entropía de  $\phi$  respecto a  $p$ .

$$h_p(\phi) = \sup_{\alpha} h(\phi, \alpha)$$

No es difícil ver que la entropía del esquema de Bernoulli conjugado a la aplicación del panadero es  $\ln 2$  y por tanto la entropía de la aplicación del panadero es  $\ln 2$ .

Un concepto más general de entropía que no depende de la medida  $p$  fue introducido por Adler, Konheim y Mc Andrew (TAMS-1965) que es la Entropía Topológica esta entropía resulta ser

$$h(\phi) = \sup_p h_p(\phi).$$

donde el supremo es tomado sobre todas las medidas invariantes  $p$ .

La entropía de una aplicación nos mide en cierto sentido, qué tanto "revuelve" la aplicación los puntos del espacio, entre más grande es la entropía más revuelve los puntos; así por ejemplo, una isometría tiene entropía cero.

¿Qué podemos decir de la entropía de una aplicación del intervalo?

Consideremos  $C^2(I) = \{f: I \rightarrow I \mid f \text{ tiene segunda derivada continua}\}$  en este espacio podemos definir la distancia entre dos funciones como  $d(f, g) = \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| + |f''(x) - g''(x)|\}$ .

En este conjunto tenemos definida la función  $h$  que a cada función le asigna su entropía  $h: C^2(I) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Fue probado por Bowen (1977) que el conjunto de puntos de continuidad (respecto a la distancia definida arriba) es un conjunto "grande" (residual). También esto mismo fue probado por Misiurewicz y Szlenk (1977), ellos encontraron que si para todo  $x$ , ó  $f'(x)$  ó  $f''(x)$  son distintas de cero, entonces  $f$  es un punto de continuidad de  $h$ . Además, encuentran que si  $c_n$  es el número de intervalos maximales sobre los cuales  $f^n$  es monótona entonces

$$h(f) = \liminf \frac{1}{n} \log c_n \leq \limsup \frac{1}{n} \log \text{Card} \{x | f^n(x) = x\}.$$

donde  $\text{Card} \{x | f^n(x) = x\}$  denota el número de puntos de período  $n$ .

Los métodos usados por Misuriewicz y Szlenk son esencialmente propiedades del operador de Perron-Frobenius que se define como

$$P_f g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \chi_A(s) g(s) ds \text{ donde } A = \{y | 0 \leq f(y) \leq x\}$$

y propiedades de la derivada de Schwarz que se define como

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Note por ejemplo que si  $Sf < 0$  entonces hay un único punto  $x$  para el cual  $f$  es convexa en  $(0, x)$  y concava en  $(x, 1)$  ó viceversa.

Para el operador de Perron-Frobenius se puede probar que si  $g$  es un punto fijo del operador  $P_f$  es decir  $P_f g = g$  entonces  $g$  es una densidad para una medida invariante bajo  $f$  y al revés también.

Milnor y Thurston (1978) encuentran también los puntos de continuidad de  $h$  por métodos distintos a los anteriores.

Ellos empiezan estudiando aplicaciones del intervalo que tienen un sólo máximo ó un sólo mínimo como el caso de las aplicaciones cuadráticas y si  $x_n = f^n(x) = f(x_{n-1})$  definen  $\epsilon_i = \epsilon(x_i)$  como 1 si  $f$  es monótona creciente en  $x_i$ , -1 si es decreciente y 0 si es el punto crítico. Prueban sin gran dificultad que si  $x_k$  tiende a una órbita periódica de período  $n$ , entonces la sucesión  $\{\epsilon_k\}$  es eventualmente periódica de período  $n$ , es decir, de un  $i$  en adelante  $\epsilon_{i+n} = \epsilon_i$  y al revés si la sucesión  $\{\epsilon_i\}$  es eventualmente periódica de período  $n$  entonces los  $x_i$  tienden a una órbita periódica de período  $n$  ó  $2n$ .

Si para fijar ideas tomamos  $f$  como un mínimo note que si  $\epsilon_0(x) < \epsilon_0(y)$  entonces  $x < y$ , mas generalmente si  $n$  es el más pequeño  $\epsilon_n(x) \neq \epsilon_n(y)$  entonces es equivalente que  $x < y$  : que  $\epsilon_0(x)\epsilon_1(x)\dots\epsilon_n(x) < \epsilon_0(y)\dots\epsilon_n(y)$ . Definen entonces el número  $\theta_n = \theta_n(x) = \epsilon_0(x)\epsilon_1(x)\dots\epsilon_n(x)$ . Note que  $\theta_n = 1$  (-1) si  $f^n$  es monótona creciente (decreciente) alrededor de  $x$ .

Consideran luego el espacio de series formales con coeficientes enteros  $\mathbb{Z}[[t]]$  en este espacio se puede definir una distancia por ejemplo

$$d(\sum a_n t^n, \sum b_n t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n} \quad \text{y el orden natural de las series:}$$

$\sum a_n t^n < \sum b_n t^n$  si la serie  $\sum (b_n - a_n) t^n = (b_k - a_k) t^k + (b_{k+1} - a_{k+1}) t^{k+1} + \dots$  cumple con  $b_k - a_k > 0$ .

Definen después la función  $\theta: \mathbb{Z}[[t]] \rightarrow \mathbb{Z}[[t]]$  como  $\theta(x) = \sum \theta_n t^n$  y ven que es monótona creciente. Definen además el invariante  $v$  como

$$v = \theta(c+) = \lim_{y \rightarrow c} \theta(y) \quad \text{donde } c \text{ es el punto crítico y los números } \gamma_n \text{ como}$$

el número de cruces, es decir, el número de veces que la función  $\epsilon_n(x) = \epsilon(f^n(x))$  cambia de +1 a -1 o de -1 a +1, en otras palabras  $\gamma_n$  es el número de soluciones a la ecuación  $f^n(x) = c$ ; por definición  $\gamma_0 = 1$ , forman la serie  $\gamma = \sum \gamma_n t^n$  y prueban que  $\gamma = \frac{1}{(1-t)v}$ .

Entre los ejemplos que dan Milnor y Thurston están:

1) Para  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $v = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}$  y por tanto  $\gamma = 1$ .

2) Para  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $v = 1 - t - t^2 + t^3 + t^4 - \dots = \frac{1-t}{1+t^2}$

3) Para  $f(x) = x^2 - 1.75$ ,  $v = 1 - t - t^2 + t^3 - t^4 - t^5 + \dots = \frac{1-t-t^2}{1-t^3}$

y aquí  $\gamma_n = \frac{1+t+t^2}{1-t-t^2} = 1 + 2t + 4t^2 + 6t^3 + 10t^4 + \dots$

y  $\gamma_n/2$  es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci.

- 4) Para  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $v = 1 - t - t^2 - t^3 - \dots = \frac{1-2t}{1-t}$  el menor  $v$  posible  
 y  $Y = \frac{1}{1-2t} = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + \dots$  el mayor  $Y$  posible.  
 (Note que para  $f(x) = x^2$  se da la mas grande  $v = 1 + t + t^2 + \dots$ )

Después definen  $s = \lim \sqrt[n]{Y_n}$  y la función  $\theta: I \rightarrow I_s$  como  
 $\theta(x) = \theta(x) \Big|_{x=1/s}$  (prueban antes que este número está bien definido,  
 la serie converge) y donde  $I_s = \left[ \frac{-s}{s-1}, \frac{s}{s-1} \right]$ .

Prueban que  $\theta$  es continuo, monótono y satisface que

$$\theta(f(x)) = F(\theta(x))$$

donde  $F: I_s \rightarrow I_s$  está definido por  $F(y) = s(|y| - 1)$ .

Note que si como Misiurewicz y Szlenk definimos  $c_n$  como el número de intervalos máximos donde  $f^n$  es monótona

$$s = \lim \sqrt[n]{c_n}$$

y por el resultado de Misiurewicz y Szlenk

$$h(f) = \log s.$$

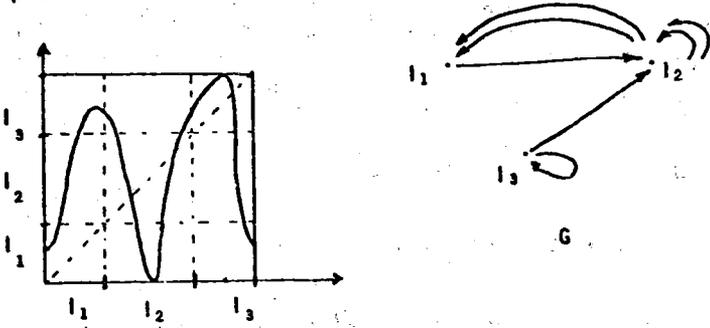
También Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Lai-Sang Young (1979) estudian las aplicaciones del intervalo. Su método es el siguiente:

Dada una aplicación  $f: I \rightarrow I$ , decimos que un intervalo  $J$  cubre a  $L$  si hay un intervalo  $K \subset J$  con  $f(K) \supset L$  y decimos que  $J$  cubre a  $L$   $n$ -veces si hay intervalos ajenos  $K_1, \dots, K_n$  con  $f(K_i) \supset L$ .

Si  $A = \{I_1, \dots, I_s\}$  es una partición de  $I$  en intervalos de  $A$  gráfica de  $f$  es una gráfica generalizada orientada con vertices  $I_1, \dots, I_s$ , tal que

si  $I_1$  cubre a  $I_j$   $n$  veces pero no  $n+1$  veces, hay  $n$  pero no  $n+1$  flechas de  $I_1$  a  $I_j$ .

Por ejemplo



Note que en la gráfica  $I_1$  cubre a  $I_2$ ,  $I_2$  cubre a  $I_1$  dos veces y a  $I_2$  también dos veces e  $I_3$  cubre a  $I_1$  y a  $I_2$ . Además, si hay intervalos  $J_0, \dots, J_{n-1}$  con flechas  $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$  en la gráfica, entonces hay un punto en  $J_0$  de período  $n$ . En el ejemplo, las dos flechas de  $I_2$  a  $I_1$  indican que hay dos puntos fijos en  $I_2$  y la flecha de  $I_3$  a  $I_3$  indica un punto fijo en  $I_3$ ; esto es muy claro.

A la gráfica  $G$  le asociamos la matriz  $M = (m_{ij})$  definida por  $m_{ij}$  = número de flechas de  $I_i$  a  $I_j$  en nuestro ejemplo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y definimos  $h(G) = \log r$  donde  $r = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ valor propio de } M \}$ .

Block et al. prueban que  $h(f) \geq h(G)$  con  $h(f)$  calculada a  $f$  restringida

$$a J = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I).$$

Ellos demuestran también usando algunos más refinamientos que si  $f$  tiene un punto de período  $p2^m$  con  $p$  impar mayor que 1, entonces  $h(f) \geq \frac{1}{2^m} \log \lambda_p$  donde  $\lambda_p$  es la raíz más grande de  $x^p - 2x^{p-2} - 1 = 0$ .

Además generalizan los resultados de Sharkovskii y Stefan para algunas aplicaciones del círculo.

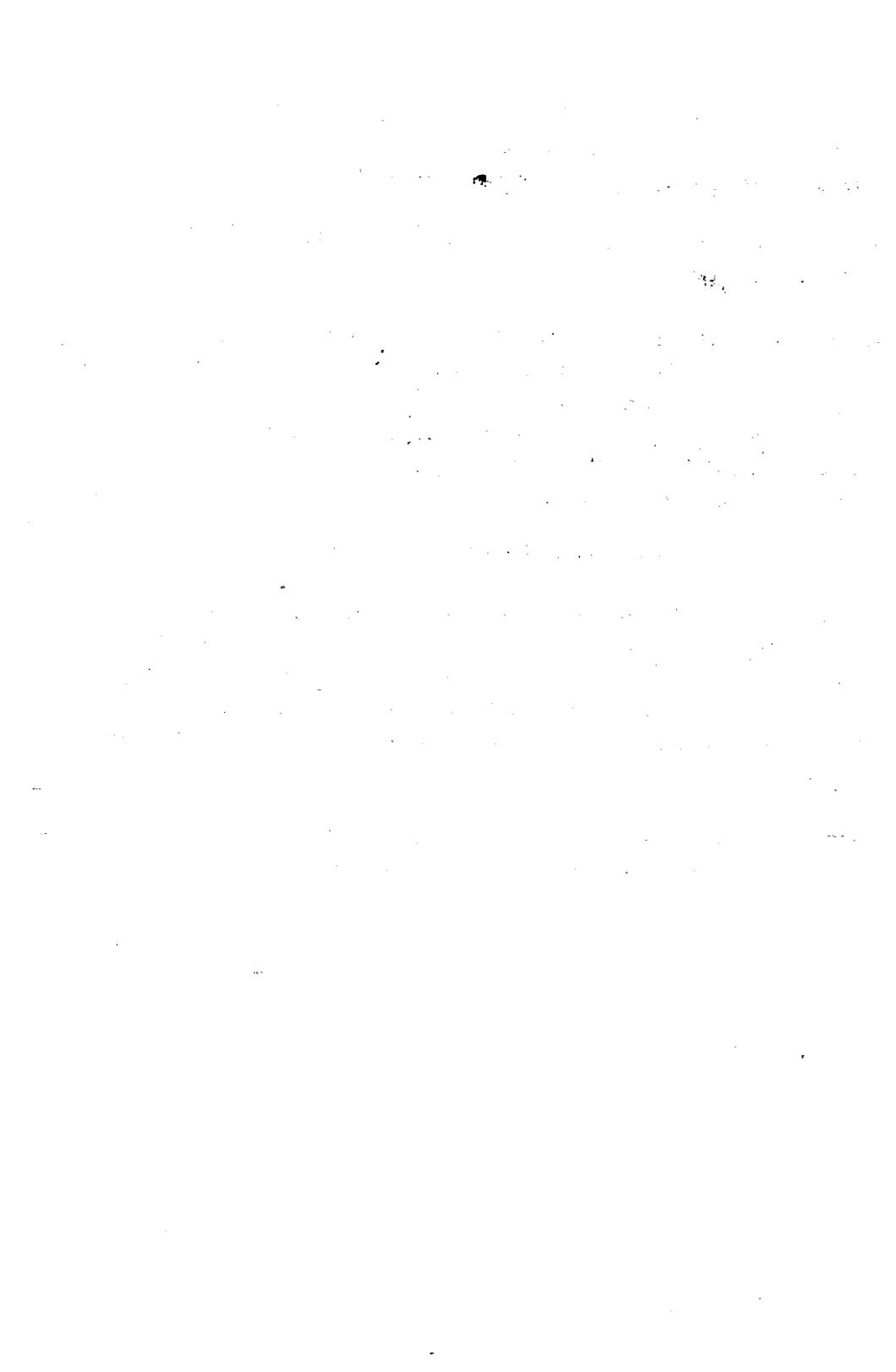
Por último, volviendo a las aplicaciones cuadráticas  $ax(1-x)$ , en 1975 Feigenbaum, definió  $\lambda_n$  como el valor del parámetro  $a$  para el cual el número de atractores se duplica por  $n$ -ésima vez (recuerde que como vimos anteriormente para  $a \leq 3$  hay un sólo atractor, el punto fijo, y al pasar por 3 aparecen dos puntos periódicos que son atractores convirtiéndose el punto fijo en expulsor). Por medio de una calculadora, calculó los cocientes

$$\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}$$

y notó que éstos, al crecer  $n$  se aproximaba a un número  $\delta$

aproximadamente 4.669201609103, hizo los mismos cálculos para las aplicaciones  $f(x) = a \sin x$  y también para otras, obteniendo siempre el "mismo" número, por lo cual decidió que la  $\delta$  es una constante universal. Esto parece haber sido probado por Guckenheimer, por Eckman y Collett y por Lanford independientemente, pero hasta la fecha desconozco la demostración.

Creo haber dado un panorama mas o menos amplio de la dinámica de aplicaciones del intervalo, sus dificultades y logros, y espero que esto sirva para interesar a algunas personas en el estudio de este tema.

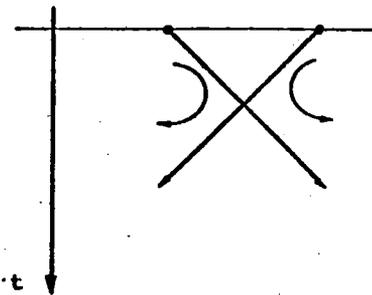


CADENAS Y CAMPOS MARKOVIANOS  
Algunas aplicaciones en Física

Wojtek Szatzschneider  
U.A.M - Iztapalapa

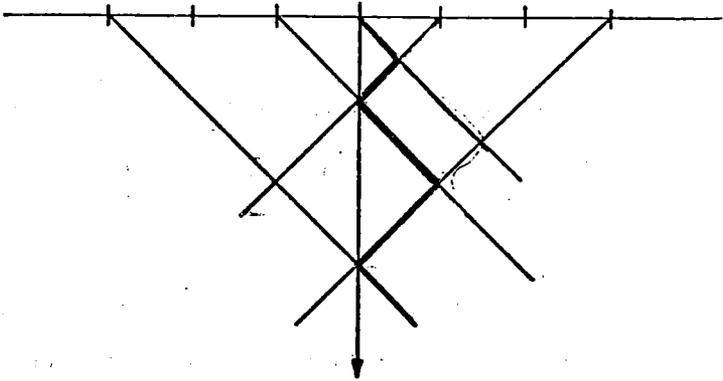
Consideremos en  $\mathbb{R}^1$  un número infinito de partículas puntos de masa  $m$  distribuidas por ejemplo, en los enteros pares.

Dotamos a cada partícula con una velocidad aleatoria  $\pm 1$  con probabilidad  $1/2$  independientemente entre sí. Cuando dos partículas chocan de las leyes de conservación de la energía y del momento, resulta que tienen que cambiar sus velocidades. (Supongamos que los choques son completamente elásticos, lo que nos da la conservación de la energía cinética y que las partículas no pueden penetrarse.)



Lo que nos interesa es el movimiento de la partícula cero -la que al principio estuvo en cero- la llamaremos "partícula negra".

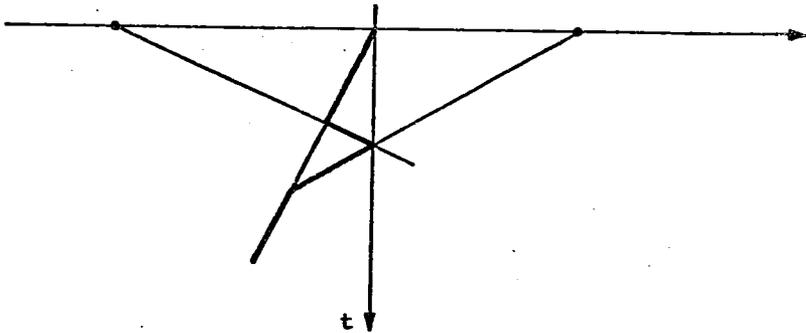
Por ejemplo:



En realidad el proceso aleatorio  $x(t)$   $t=0, 1, 2, \dots$  que describe el desarrollo del movimiento de la "partícula negra" podemos describirlo en la siguiente manera.

En cada época  $t=0, 1, 2, \dots$  hay dos posibilidades para el movimiento de la partícula negra a la izquierda o a la derecha, con velocidad unitaria independientemente del pasado, lo que nos conduce a la observación siguiente. Si conocemos la posición de la partícula negra en momento dado  $t_0$  -entero positivo, a continuación lo llamaremos presente, entonces el conocimiento de sus posiciones en los enteros  $0 \leq s \leq t_0$  - el pasado, no nos ayuda para predecir el futuro

y considerando las épocas de choques posibles, el proceso  $x(t)$  ya no posee la propiedad de Markov. ¿Por qué? Pues en este caso una partícula que ya produjo un choque contra la partícula negra, puede influir en el futuro dando otro choque



y el conocimiento de todo el pasado puede ponerlos en condiciones mejores para las predicciones del futuro, que el conocimiento de sólo el presente. En estos modelos podemos hacer partículas más y más densas y más veloces y pasar al límite. Así se obtiene un proceso de Markov llamado movimiento browniano con tiempo continuo (proceso aleatorio que posee la propiedad de Markov) en el primer caso; en el segundo caso (cuatro velocidades) es un proceso aleatorio no markoviano. Estos movimientos "reales" no tienen velocidad en ningún punto -no existe la derivada. En nuestra plática nos restringiremos al caso discreto, es decir, el tiempo es discreto y hay un número a lo más numerable de posiciones posibles de nuestro proceso, los que llamamos estados. Enumerándolos decimos que  $x_n = i$  si en la época  $n$  el proceso se encuentra en el esta

movimiento, el hecho, que en términos de probabilidades condicionales, se expresa en la forma

$$\begin{aligned}
 P(x(t) = k | x(t_0) = j, x(s_1) = j_1, \dots, x(s_n) = j_n) = \\
 = P(x(t) = k | x(t_0) = j)
 \end{aligned}$$

donde

$$t > t_0 > s_1 > \dots > s_n.$$

Debe ser claro que no podemos decir que el futuro desarrollo sea independiente del pasado, sino que tiene lugar la independencia "condicional". Si conocemos el presente, entonces podemos rechazar las informaciones acerca del pasado.

Esta propiedad es llamada propiedad de Markov. No siempre movimientos reales de partículas tienen la propiedad de Markov. Hagamos un cambio del modelo anterior. En vez de dos velocidades ponemos

$$v_k = \begin{cases} +1 & \text{con prob } \frac{1}{4} \\ -1 & \text{con prob } \frac{1}{4} \\ +2 & \text{con prob } \frac{1}{4} \\ -2 & \text{con prob } \frac{1}{4} \end{cases}$$

do  $i = \text{ésimo } n = 0, 1, 2, \dots$

Decimos que  $x_n$  es una cadena de Markov, si tiene la propiedad de Markov.

Al tener la distribución inicial  $p_i = P(x_0 = i)$  y las probabilidades de transición  $P(x_n = j | x_{n-1} = i) = P_{ij}$  (supongamos que  $P_{ij}$  no dependen de  $n$ ), (notemos que

$$\sum_j P_{ij} = 1)$$

podemos determinar en la manera única todas las probabilidades de los eventos

$$\{x_{n_1} = j_1, x_{n_2} = j_2, \dots, x_{n_k} = j_k\}$$

Por ejemplo

$$P(x_0 = j_0, x_1 = j_1, x_2 = j_2) = P_{j_0} \cdot P_{j_0 j_1} \cdot P_{j_1 j_2}$$

lo que resulta inmediatamente de la propiedad de Markov.

Estas probabilidades se llaman distribuciones finito dimensionales.

Consideremos ahora el ejemplo siguiente:

Hay dos recipientes A y B con partículas distinguibles. Hay en total  $2n$  partículas, sacamos una partícula elegida al azar (cada partícula tiene la misma probabilidad  $1/2n$  de ser escogida) y la pasamos al otro recipiente.  $x_n = k$  si en la época  $n$  hay  $k$  partículas en el recipiente A. Por lo tanto,

$$P_{k,k-1} = \frac{k}{2} \quad P_{k,k+1} = \frac{2n-k}{2n} \quad P_{ij} = 0 \text{ para } |i-j| \neq 1$$

Este modelo (lo implantaron P. y T. Ehrenfest en 1905) explica algunos fenómenos importantes que ocurren en mecánica clásica.

A saber: Este modelo es reversible, es decir, si es posible el paso del estado  $E_j$  al estado  $E_i$ . Además, si partimos de cualquier estado, siempre (en realidad casi seguramente, o sea con probabilidad 1) regresemos a este estado (en promedio el tiempo de regreso puede ser muy grande). ¡Esto ya no es obvio y necesita una demostración!

Por otra parte, es claro que si en el recipiente B hay muy pocas partículas y  $n$  es muy grande, tiene lugar el flujo o la difusión del recipiente A al B con probabilidad muy muy grande:

En aplicaciones físicas  $n$  es del orden  $10^{26}$ . Basándose en este modelo, se pudieron explicar algunas "paradojas"

que se desprendieron de un razonamiento de Boltzmann quien implantó un poco rústicamente la teoría de probabilidad a la mecánica y descubrió una magnitud llamada entropía que crecía con el tiempo. Boltzmann quiso tratar esta magnitud únicamente dentro de la teoría de la mecánica clásica. Pero de ahí resultaron paradojas, pues las leyes de mecánica son reversibles. (NO se puede detectar la diferencia cambiando  $t$  a  $-t$ .) Por otra parte tiene lugar un teorema de Poincaré que dice que un sistema físico regresa a su estado inicial. Ahora, como sucede muy frecuentemente en la ciencia, aquí también las contradicciones desarrollaron el uso riguroso de la teoría de probabilidad en física, beneficiando a ambas teorías.

Ahora pasaremos a modelos matemáticos que tienen la finalidad de explicar algunos fenómenos de ferromagnetismo. Consideremos una sucesión finita, digamos  $1, 2, \dots, n$  cada punto-partícula la dotamos con un pequeño dipolo-espín  $\pm 1$

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$\sigma_j(\omega) = \omega_j = \pm 1$$

La "energía" se expresa en la siguiente forma

$$u(\omega) = -J \sum_{\substack{i,j \\ |i-j|=1}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - mH \sum \sigma_i(\omega)$$

$m$  es una constante y  $H$  la intensidad del campo magnético externo.

$J > 0$  caso atractivo, tiende a la situación de vecinos iguales.

$J < 0$  caso repulsivo, tiende a la situación de vecinos distintos.

Esta disposición proviene de Ising (1925) y podemos extenderla a  $\mathbb{Z}^n$  donde  $\mathbb{Z}^n = \{z \div z = (z_1, \dots, z_n), z_i \text{ entero}\}$  o para gráficas (siempre y cuando podamos hablar sobre vecinos)

```

+ + + +
- + + +
+ - - +
+ + + -

```

Cada punto interior tiene 4 vecinos. Los puntos de la frontera 2 ó 3, (en 1971 Weidlich aplicó este tipo de modelos a sociología:

+ significa posición conservadora

- significa posición liberal

campo externo puede ser la posición del gobierno).

Al tener una distribución de probabilidad sobre las configuraciones, decimos que ésta forma un campo aleatorio markoviano si

$$P(\sigma_j = a | \sigma_k, k \neq j) = P(\sigma_j = a | \sigma_k, k \in N_j)$$

donde  $N_j$  es el conjunto de vecinos del punto  $k$ .

Esto simplemente generaliza las cadenas de Markov.

Si sabemos cuales son las características locales, es decir, si conocemos  $p(\sigma_j = a | \sigma_k, k \in N_j)$ , y estas cumplen con la condición anterior, bajo ciertas condiciones de regularidad se demuestra que la probabilidad de las configuraciones  $\omega$  se pueden expresar en la siguiente forma

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-U(\omega)/kT}$$

con una elección de  $U$ , lo que es precisamente la medida de Gibbs de mecánica estadística

$k$  - es una constante

$T$  - temperatura absoluta

Volvemos a física. Sea  $J > 0$ ,  $H = 0$ . Se ha creído que

en temperaturas bajas espín tiende al estado de la energía baja, la mayoría de  $\sigma_j$  más, o la mayoría de  $\sigma_i$  menos formando un magneto.

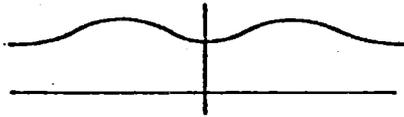
La magnetización total

$$M(\omega) = \eta_+(\omega) - \eta_-(\omega)$$

$\eta_+(\omega)$  es el número total de +

$\eta_-(\omega)$  es el número total de -

debe tener una distribución de probabilidad con 2 jorobas.



Este fenómeno no puede ocurrir en 1 dimensión (en  $\mathbb{Z}^1$ ).

Un razonamiento intuitivo podría ser como sigue. Para cadenas de Markov ocurre un análogo del teorema límite central donde la distribución límite es normal (de Gauss) unimodal, y de ahí se desprende la imposibilidad de 2 jorobas. En  $\mathbb{Z}^2$  Griffiths (1965) logró explicar el fenómeno de 2 jorobas. Ising creyó que su modelo no servía)

Para cadenas de Markov se demuestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma_0 = 1 | \sigma_N = 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma_0 = 1 | \sigma_N = -1)$$

análogicamente, para campos markovianos en  $\mathbb{Z}^1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma_0 = 1 | \sigma_N = \omega_N, \sigma_{-N} = \omega_{-N}) =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sigma_N = 1 | \sigma_N = \tilde{\omega}_N, \sigma_{-N} = \tilde{\omega}_{-N}).$$

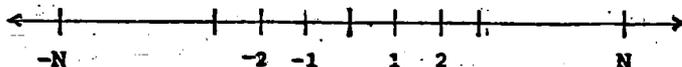
para cualquier elección de espíns

$$\omega_N) \quad \omega_N) \quad \tilde{\omega}_N) \quad \tilde{\omega}_{-N}$$

Lo que podemos expresar es que en el límite no existe efecto de la frontera. Por otra parte, por naturaleza de campos markovianos se obtiene sin dificultad que

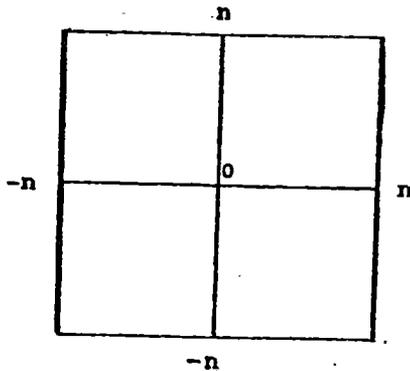
$$P(\sigma_0 = 1 | \sigma_N = \omega_N, \sigma_{-N} = \omega_{-N}) =$$

$$P(\sigma_0 = 1 | \sigma_k = \omega_k | k| \geq N)$$



(si las barreras se alejan, lo que está fuera de  $(-N, N)$  es aproximadamente despreciable para lo que sucede en el origen.

En  $\mathbb{Z}^2$  la situación es completamente diferente. Consideremos cuadrados



Los que llamaremos  $C_n$  y fuera de los cuales todos los puntos tienen el espín + o espín -

Aumentando las dimensiones del cuadrado se puede demostrar que

$$P(\sigma_0 = 1 | \text{fuera de } C_n \text{ todos espín } +) = P_+^{(n)}(\sigma_0 = 1)$$

es decreciente con  $n$

$$P(\sigma_0 = 1 | \text{fuera de } C_n \text{ todos espín } -) = P_-^{(n)}(\sigma_0 = 1)$$

es creciente con  $n$

Por lo que tienen límites  $P_+(\sigma_0 = 1)$ ,  $P_-(\sigma_0 = 1)$ , semejantemente

$$P_+^{(n)}(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) \searrow P_+(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1)$$

$$P_-^{(n)}(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) \nearrow P_-(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1) \text{ etc.}$$

A partir de ésto, ya podemos calcular probabilidades  $P_+$  y  $P_-$  para cualquier configuración. Por ejemplo

$$P_+(\sigma_a = 1, \sigma_b = -1) = P_+(\sigma_a = 1) - P_+(\sigma_a = 1, \sigma_b = 1)$$

¡Resulta que en temperaturas bajas  $P_+$  y  $P_-$  son diferentes!

Nótese que  $P_+$  y  $P_-$  tienen las mismas características locales. Si consideramos un toro (pegamos las fronteras de un cuadrado) aumentándolo como antes, resulta que la distribución de probabilidad límite es igual a  $\frac{1}{2} P_+ + \frac{1}{2} P_-$  y si bien  $P_+(M(\omega))$  tiene una joroba (es unimodal) y  $P_-(M(\omega))$  también es unimodal pero con joroba situada en otro lugar, entonces  $P = \frac{1}{2} P_+ + \frac{1}{2} P_-$  ya tiene dos jorobas como debiera salir basándose en los experimentos.

El modelo riguroso matemático pudo una vez más aplicarse a física. En este tipo de modelos el chiste consiste en que podamos "cambiar el orden". Es decir, primero investigar rigurosamente el modelo matemático, demostrar teoremas y basarnos en teoremas rigurosos, descubrir algunas leyes del mundo real.

Por otra parte, la validez experimental de estas leyes nos permite decidir que tan bueno es el modelo propuesto.

Al tener una distribución de probabilidad sobre las configuraciones, decimos que ésta forma un campo aleatorio markoviano si

$$P(\sigma_j = a | \sigma_k, k \neq j) = P(\sigma_j = a | \sigma_k, k \in N_j)$$

donde  $N_j$  es el conjunto de vecinos del punto  $k$ .

Esto simplemente generaliza las cadenas de Markov, donde el conjunto de vecinos era el pasado más cercano.

Si sabemos cuales son las características locales, es decir, si conocemos  $p(\sigma_j = a | \sigma_k, k \in N_j)$ , y estas cumplen con la condición anterior, bajo ciertas condiciones de regularidad de las configuraciones  $\omega$  se expresa en la siguiente forma

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-u(\omega)/kT}$$

lo que precisamente la medida de Gibbs de mecánica estadística

$k$  - es una constante

$T$  - temperatura absoluta

Esto simplemente generaliza las cadenas de Markov, donde el conjunto de vecinos era el pasado más cercano.

Si sabemos cuales son las características locales, es decir, si conocemos  $p(\sigma_j = a \mid \sigma_k, k \in N_j)$ , y estas cumplen con la condición anterior, bajo ciertas condiciones de regularidad se demuestra que la probabilidad de las configuraciones  $\omega$  se expresa en la siguiente forma

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-u(\omega)/kT},$$

lo que es precisamente la medida de Gibbs de mecánica estadística

$k$  - es una constante

$T$  - temperatura absoluta

Al tener una distribución de probabilidad sobre las configuraciones, decimos que ésta forma un campo aleatorio markoviano si

$$P(\sigma_j = a \mid \sigma_k, k \neq j) = P(\sigma_j = a \mid \sigma_k, k \in N_j)$$

donde  $N_j$  es el conjunto de vecinos del punto  $k$ .



# TECNICAS DE DIAGNOSTICO Y MANEJO DE PUNTOS DE INFLUENCIA Y MULTICOLINEALIDAD EN REGRESION LINEAL.

Guillermo P. Zárate de Lara\*.  
Blanca Luz Díaz de Zárate\*\*.

## SINOPSIS

Uno de los procedimientos más usados para ajustar modelos de regresión lineal es el de mínimos cuadrados. Las predicciones obtenidas usando dicho procedimiento, pueden verse severamente afectadas por la presencia de una sola observación, por lo tanto es de gran importancia entender la influencia que puede tener un particular dato en el ajuste obtenido. Así mismo dado que la presencia de multicolinealidades afecta severamente a los coeficientes de regresión estimados, es importante que los investigadores se entrenen en la detección y manejo de las mismas. En el trabajo se presentan varios indicadores de puntos de influencia y algunos procedimientos para detectar multicolinealidad, así como posibles soluciones a los problemas. Mediante un ejemplo se ilustra el manejo de las técnicas de diagnóstico, haciendo énfasis entre la diferencia existente entre procesamiento y análisis de datos.

## SUMMARY

One of the most common procedures for the obtention of estimators in linear regression models is the least-squares fitting. In this type of fitting it is important to understand the level of leverage that a particular data will have on each fitted value. Further more, since multicollinearity may have several adverse effects on the estimated regression coefficients, it is necessary that researches be trained in detecting its existence. Several indicators of influence points and multicollinearity are described, besides some solutions to the problem. An example is presented here that show the difference between data processing and data analysis.

---

\* Profesor Investigador Titular, Centro de Estadística y Cálculo, Colegio de Postgraduados, Chapingo, México.  
\*\* Auxiliar de Investigación, Centro de Estadística y Cálculo, Colegio de Postgraduados, Chapingo, México.

## INTRODUCCION

Seguramente la regresión lineal, es una de las herramientas estadísticas que actualmente goza de gran popularidad entre los investigadores de muchas áreas de la ciencia. En buena medida, esto es debido a que la gran cantidad de paquetes estadísticos disponibles (SAS, SPSS, P-STAT, etc) le permiten a personas que cuentan con un mínimo de conocimientos estadísticos, tener un fácil y rápido acceso a los métodos de regresión, sin exigirles mayor reflexión sobre la naturaleza del problema que tratan de resolver, y sobre los supuestos inherentes a los procedimientos estadísticos que se empleen. Lo anterior ha dado como resultado que una técnica tan poderosa y tan cuidadosamente estudiada por los profesionales de la estadística, se haya convertido en incontables ocasiones solamente en una simple rutina de cálculos aritméticos.

Por otra parte los procedimientos computacionales tan eficientes, le permiten al investigador experimentado en el análisis de datos, aumentar la cantidad de observaciones y de variables predictoras, con un incremento mínimo en el tiempo de computación. El aumento del tamaño de muestra es definitivamente deseable, aunque hay que tener cuidado en la aparición de puntos de influencia, los cuales aun cuando son observaciones válidas con una gran cantidad de información sobre el fenómeno en estudio, también pueden tener in

fluencia muy negativa sobre los estimadores obtenidos. Así mismo el aumento de variables predictoras, que muchas veces enriquece la estructura del modelo, puede ocasionar problemas de multicolinealidad, lo cual tiene muy graves consecuencias en los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados, y por lo tanto en la capacidad predictiva del modelo.

En este trabajo, mediante un ejemplo, se pretende ilustrar la diferencia que existe entre procesamiento de datos y análisis de datos. Para esto se consideran dos problemas relacionados con la estructura de la información, que a menudo les resultan invisibles a los usuarios de la regresión. (1) La detección y manejo de puntos de influencia y (2) La detección y corrección del problema de multicolinealidad. Se presentan de manera muy sucinta las técnicas de diagnóstico y algunas formas de obtener las estadísticas relevantes.

### EL MODELO

En regresión lineal el modelo que se postula es de la forma

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_{1i} + \theta_2 X_{2i} + \dots + \theta_p X_{pi} + \epsilon_i, \quad (1)$$

el cual al ser escrito como:

$$\underset{nx1}{y} = \underset{nx(p+1)}{X} \underset{(p+1) \times 1}{\theta} + \underset{nx1}{\epsilon},$$

resume la dependencia existente entre las variables predicto

ras  $X_1, X_2, \dots, X_p$  y la variable respuesta  $Y$  en términos de los datos  $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}$  y  $y_i$  para  $i=1, 2, \dots, n$ . (No se llaman a las  $X$ 's variables independientes, porque muy a menudo no son independientes en ningún sentido razonable). Si se ajusta el modelo (1) por mínimos cuadrados, suponiendo que  $X$  tiene rango  $p+1$  y que  $E(\underline{\varepsilon})=0$  y  $\text{Var}(\underline{\varepsilon})=\sigma^2 I$ , el estimador de  $\underline{\theta}'=(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p)$  resulta ser,

$$\hat{\underline{\theta}} = (X'X)^{-1}X'y. \quad (2)$$

Los valores estimados ( $\hat{y}$ ) y los residuales ( $\underline{r}$ ) se calculan usualmente con las expresiones

$$\hat{y} = X\hat{\underline{\theta}} = X(X'X)^{-1}X'y = Hy, \quad (3)$$

$$\underline{r} = y - \hat{y} = (I-H)y, \quad (4)$$

donde  $H = X(X'X)^{-1}X'$  es el proyector ortogonal del subespacio vectorial que expanden las columnas de  $X$ . Por lo tanto de (3) se puede concluir que  $\hat{y}$  es el punto en ese subespacio que se encuentra más cercano a  $y$ . La matriz  $H$  juega un papel importante en la estructura de las matrices de covarianzas de  $\hat{y}$  y  $\underline{r}$ , a saber:

$$\text{Var}(\hat{y}) = H\sigma^2,$$

$$\text{Var}(\underline{r}) = (I-H)\sigma^2.$$

*El modelo estandarizado.*

Una estandarización de las variables del modelo definido en

(1), muy efectiva para reducir imprecisiones numéricas asociadas con dichas variables (Webster et al. (1974)), y que reporta grandes beneficios en el análisis de regresión estadística por:

$$W_{ij} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_i}{d_i} \quad (5)$$

$$i=1,2, p, j=1,2, \dots, n.$$

Si se considera el modelo

$$\underline{y} = \beta_0 \underline{f} + W\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

donde  $W$  es una matriz de  $n \times p$ , de rango  $p$  cuyos elementos son los  $W_{ij}$ ,  $\underline{f}$  un vector de unos,  $\beta_0 = \theta_0 + \sum_{i=1}^p \bar{X}_i \theta_i$  y  $\underline{\beta}$  un vector con elementos  $\beta_i = \theta_i d_i$ , entonces los estimadores de mínimos cuadrados son

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} \quad \text{y} \quad \hat{\underline{\beta}} = (W'W)^{-1} W' \underline{y} \quad (6)$$

La estandarización definida en (5), permite obtener la matriz de correlaciones de las variables predictoras, la cual se denotará por  $C$ , de la siguiente forma,

$$C = W'W \quad (7)$$

A continuación se presenta a  $C$  en función de los vectores y raíces característicos,

$$C = V\Lambda V', \quad (8)$$

donde  $\Lambda = \text{diagonal } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  contiene las raíces características de  $C$  y  $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$  contiene los vectores característicos de  $C$ . Además  $V'V = VV' = I$ .

### PUNTOS DE INFLUENCIA

En el contexto de un análisis de datos basado en un modelo de regresión, donde los estimadores se obtuvieron por mínimos cuadrados, se dice que una observación tiene influencia o es un *punto de influencia*, si características esenciales del análisis se ven alteradas cuando se elimina dicha observación. La detección y manejo de dichos puntos ha sido tratado ampliamente en la literatura, sobresaliendo los trabajos de Cook (1977, 1979), Hoaglin y Welsh (1978), Cook y Weisberg (1980), Velleman y Welsh (1981) y Johnson y Geisser (1983). En dichos trabajos se presentan los fundamentos teóricos y las estadísticas que permiten detectar los puntos de influencia.

La motivación de presentar una rutina para detectar puntos de influencia se deriva de diversas consideraciones, entre otras, del hecho de que el manejo de grandes cantidades de datos hace muy difícil que por simple inspección de las observaciones, se detecten características poco usuales en ellas. Además de que solamente usuarios con mucha experiencia pueden detectar aberraciones en el comportamiento de un

conjunto de observaciones.

Los elementos  $h_{ij}$  de la matriz  $H = X(X'X)^{-1}X'$  reflejan la cantidad de influencia que una observación  $y_i$  ejerce sobre  $\hat{y}_i$ , en particular la mayor información está contenido en los elementos  $h_{ii}$  ( $= h_i$ ) de su diagonal. Para ilustrar con mayor claridad como los  $h_i$  afectan a  $\hat{y}_i$ , a grado tal que en situaciones extremas pueden definir el tipo de ajuste que debe llevarse a cabo, observe que de (3) se tiene que

$$\hat{y}_i = \sum_j h_{ij} y_j . \quad (9)$$

Ahora bien como  $H$  es un proyector ortogonal (es simétrica e idempotente) se tiene que  $0 \leq h_i \leq 1$ ,  $\sum h_i = p+1$ ,  $\bar{h} = \frac{p+1}{n}$  y  $h_i = h_i^2 + \sum_{j \neq i} h_{ij}^2$ . Por lo tanto si  $h_i = 0$ , entonces  $h_{ij} = 0$  para toda  $i \neq j$  y luego entonces de (9) se obtiene que  $\hat{y}_i = 0$ . Esto implica que en este caso  $\hat{y}_i$  debe ajustarse en cero por diseño, ya que no es afectada por  $y_i$  o cualquier otra  $y_j$ . Por otra parte si  $h_i = 1$ , se tendrá que  $h_{ij} = 0$  para toda  $i \neq j$  y por (9) se obtiene que  $\hat{y}_i = y_i$ , en cuyo caso el modelo se ajusta perfectamente a ese dato. De hecho en esta situación se tendrá que un parámetro (8) del modelo se está dedicando para ajustar una observación en particular. Típicamente valores grandes de  $h_i$  corresponden a una observación aberrante ( $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$ ). Hoaglin y Welsh (1978) sugieren que si

$$h_i > \frac{2(p+1)}{n} \quad (10)$$

se tendrá una indicación de que se puede tener un punto de influencia, y por lo tanto se debe observar con cuidado la observación  $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$  para la cual se satisfizo (10).

Hoaglin y Welsh (1978), han sugerido un indicador de la presencia de puntos de influencia que esta basado en el tamaño del residual  $r_i = y_i - \hat{y}_i$ , y recibe el nombre de *residual estudentizado*. Este tiene la siguiente expresión

$$t_i = \frac{r_i}{S(1-h_i)^{1/2}}, \quad (11)$$

donde  $S^2$  es el Cuadrado Medio del Error que resulta del ANVA usando el modelo definido en (1) y  $r_i$  se obtiene usando (4). El residual estudentizado  $t_i$ , tiene una distribución de  $t$  - de Student con  $n-p$  grados de libertad (Hoeglin y Welsh - - (1978)).

Un tercer indicador de la naturaleza crítica de cada punto, - propuesto por Cook (1977), esta basado en el tamaño de la - distancia existente entre  $\hat{\theta}_{(i)}$  y  $\hat{\theta}$ , donde  $\hat{\theta}_{(i)}$  es el estima - dor de  $\theta$  obtenido al eliminar el  $i$ -ésimo dato. La distan - cia entre  $\hat{\theta}_{(i)}$  y  $\hat{\theta}$  se induce usando la A-norma de un vector, a saber,

$$\|\omega\|_A = (\omega' A \omega)^{1/2}, \quad (12)$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada no negativa definida. Usando (12) Cook (1977) propuso la estadística

$$D_i = \|\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}\|^2 = \frac{(\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta})' X' X (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta})}{(p+1) S^2} \quad (13)$$

Una expresión equivalente de  $D_i$ , la cual esta en función de  $t_i$  y  $h_i$ , es la siguiente

$$D_i = \frac{t_i^2 h_i}{(p+1)(1-h_i)} \quad (14)$$

De (14) es fácil observar que  $D_i$  es función de tres cantidades relevantes, todas ellas dependiendo de todo el conjunto de datos, el número de parámetros en el modelo, el  $i$ -ésimo residual estudentizado y la razón  $\text{Var}(\hat{y}_i)/\text{Var}(r_i)$ , esto último debido a que  $\text{Var}(\hat{y}_i) = h_i \sigma^2$  y  $\text{Var}(r_i) = \sigma^2(1-h_i)$ . Suponiendo que  $D_i$  tiene aproximadamente una distribución de F con  $(p+1)$  y  $n-(p+1)$  grados de libertad, se tendrá que valores numéricos grandes de  $D_i$  sugeriran que puntos requieren de una investigación más meticulosa. Esto es equivalente a estudiar el elipsoide de confianza para  $\theta$  basado en todo el conjunto de observaciones y encontrar el elipsoide que pasa en  $\hat{\theta}_{(i)}$ .

En el presente trabajo se sugiere una metodología, la cual usando de manera conjunta la información proporcionada por  $h_i$ ,  $t_i$  y  $D_i$ , permite encontrar que datos merecen atención por considerarlos fuertes candidatos a ser puntos de influencia.

## MULTICOLINEALIDAD

Uno de los análisis iniciales a los que debe someterse un conjunto de datos, a los cuales se les va a ajustar un modelo de regresión lineal, es el consistente en detectar la presencia de multicolinealidad, término empleado por los economistas, para denotar casi dependencias lineales entre las columnas de la matriz de variables explicatorias  $X$ . La multicolinealidad en un problema que puede presentarse, aún cuando no exista una base teórica o explicación física que la justifique, y tiene como principal efecto el hacer que las varianzas de algunos de los estimadores de los coeficientes de regresión sean muy grandes. Esto último tiene graves consecuencias, así por ejemplo, los estimadores pueden ser muy grandes y con signos equivocados, o bien, las estadísticas de  $F$  parciales ser altamente dependientes y poco confiables para ser usadas en un proceso de selección de variables.

Con el objeto de profundizar en la discusión, se presenta formalmente lo que se entiende por multicolinealidad. Si  $w_1, w_2, \dots, w_p$  son las columnas de la matriz  $W$ , cuyos elementos se han definido en (5), entonces se dice que los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_p$  son multicolineales si existen constantes  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , no todas cero, tales que,

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p \approx 0. \quad (15)$$

Como puede observarse de (15), la multicolinealidad es una cuestión más de grado que de existencia. Mientras más cerca de cero este la combinación lineal  $\sum a_i w_i$ , más fuerte será el grado de multicolinealidad.

#### *Detección de multicolinealidad.*

Para detectar multicolinealidad, una gran mayoría de los usuarios depende casi exclusivamente del examen de los elementos fuera de la diagonal de la matriz  $C=W'W$ , donde se encuentran ubicadas las correlaciones entre las variables predictoras. Es casi consenso que cualquier correlación mayor de 0.7 deberá investigarse cuidadosamente. Esto ha traído consigo que se cometan una gran cantidad de errores de decisión, pues a veces las correlaciones por pares entre las variables predictoras no muestran magnitudes muy grandes, y sin embargo la multicolinealidad esta presente (Mansfield y Helms (1982)). Para estar seguros de que todas las multicolinealidades se han detectado, se requiere de otros procedimientos que se discuten a continuación.

Supóngase que una raíz característica de  $C=W'W$ , digamos  $\lambda_j$ , tiene un valor muy cercano a cero. Como todos los elementos de un vector característico son menores que uno, se tendrá que  $\lambda_j v_j = 0$  y por lo tanto de la definición de vectores característicos y raíces características se tiene que

$$W'W v_j = \lambda_j v_j = 0, \quad (16)$$

Premultiplicando (16) por  $y_j'$ , se obtiene

$$y_j' W' W y_j = \lambda_j \approx 0,$$

lo cual a su vez implica que

$$W y_j = \sum_{r=1}^p v_{rj} w_r \approx 0 \quad (17)$$

La ecuación (17) implica que los elementos,  $v_{rj}$ , de los vectores característicos que corresponden a raíces características cercanas a cero, proveen los coeficientes en (15) que definen las multicolinealidades entre las variables predictoras. Los elementos más grandes de  $y_j$  determinarán que variables predictoras están más involucradas en la presencia de una multicolinealidad, esto debido a que los  $w_{em}$  son las variables predictoras estandarizadas. Todo lo anterior produce un criterio, necesario y suficiente (Mansfield y Helms (1982)), para detectar multicolinealidad, que consiste en examinar la magnitud de las raíces características de  $W'W$ . Valores de raíces características cercanos a cero indican la presencia de una multicolinealidad. El criterio establecido es muy confiable si no existen puntos de influencia, pues si este es el caso, las raíces características se verán muy afectadas, dando como consecuencia un panorama muy distorsionado.

Otro criterio para detectar multicolinealidades propuesto por Marquardt (1970), está basado en el examen de los elementos de la diagonal de la matriz  $Q = (W'W)^{-1}$ . Es posible

demostrar que el  $j$ -ésimo elemento de la diagonal de  $Q$  puede escribirse como

$$q_{jj} = (1.0 - R_j^2)^{-1}, \quad (18)$$

donde  $R_j^2$  es el coeficiente de determinación obtenido de la regresión entre la  $j$ -ésima variable predictora estandarizada ( $w_j$ ) con las  $(p-1)$  restantes. Las implicaciones que se obtienen a partir de la ecuación (18), son de extrema importancia para la estimación de los coeficientes de regresión por mínimos cuadrados. Si las variables presentan un alto grado de multicolinealidad entonces  $R_j^2$  tendrá un valor cercano a uno, ya que la  $j$ -ésima variable predictora  $w_j$  (si esta involucrada en la multicolinealidad) podrá ser aproximada adecuadamente por medio de las restantes variables. Entonces si  $R_j^2$  tiene un valor cercano a uno,  $q_{jj}$  será de una magnitud considerable y consecuentemente la  $\text{Var}(\hat{\beta}_j) = q_{jj}\sigma^2$  tendrá un valor grande. Por otra parte si  $w_j$  es ortogonal al resto de las columnas de  $W$ , entonces  $R_j^2 = 0$  y  $\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2$ , de otra forma  $\text{Var}(\hat{\beta}_j) = q_{jj}\sigma^2 > \sigma^2$  debido a que  $q_{jj} > 1$  siempre que  $R_j^2 > 0$ . Lo anterior implica que las  $q_{jj}$ , miden la inflación de las varianzas de los estimadores debida a multicolinealidad entre las variables predictoras. Los  $q_{jj}$  son referidos como *Factores de Inflación de Varianza (FIV)*. Cualquier  $FIV(j) > 4$  implica que el asociado  $R_j^2 > 0.75$  y si  $FIV(j) > 10$  entonces  $R_j^2 > 0.90$ .

Los  $q_{jj}$  también muestran como las covarianzas y las correla

ciones entre los coeficientes de regresión estimados se incrementan cuando existen multicolinealidades. Esto se puede observar de las siguientes expresiones. Es posible demostrar que

$$(W'W)^{-1} = \sum_{r=1}^P \lambda_r^{-1} v_r v_r'$$

y por lo tanto

$$q_{jj} = \sum_{r=1}^P \lambda_r^{-1} v_{jr}^2 \quad (19)$$

y

$$q_{jk} = \sum_{r=1}^P \lambda_r^{-1} v_{jr} v_{kr} \quad (20)$$

La expresión (19) y (20) implican que

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) = q_{jk} \sigma^2 \quad (21)$$

y

$$\text{Corr}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) = \frac{q_{jk}}{(q_{jj} q_{kk})^{1/2}} \quad (22)$$

La ecuación (19) muestra, desde otro punto de vista, como es que los  $q_{jj}$  permiten detectar multicolinealidades, pues si estas existen, algunas raíces características están cercanas a cero y sus correspondientes inversas serán grandes en magnitud, ocasionando que el producto  $\lambda_r^{-1} v_{jr}^2$  sea grande y consecuentemente  $q_{jj}$  sea grande. La ecuación (20) muestra que  $q_{jk}$  será grande para cualquier par de variables involucradas en una multicolinealidad. Se puede concluir entonces que si  $w_j$  y  $w_k$  (o bien  $X_j$  y  $X_k$ ) son multicolineales se tendrá que las expresiones dadas en (21) y (22) serán - -

grandes.

*La solución ridge.*

La regresión ridge, propuesta por Hoerl y Kennard (1970 a, b), es un método de estimación que permite ajustar a los estimadores de mínimos cuadrados (mc), de tal forma que se reduzca la influencia que tiene sobre ellos la presencia de - multicolinealidad. El propósito fundamental de la regresión ridge es el de obtener estimadores de los coeficientes de - regresión, que aunque sesgados, sean mas estables que los - de mínimos cuadrados cuando la matriz X se encuentra mal -- condicionada. Los estimadores ridge se definen como una -- función del parámetro ridge, k, cuyo valor debe ser elegido por el analista de datos. Si este selecciona adecuadamente el valor de k, tendrá estimadores con menor cuadrado medio del error que los de mc (Hoerl y Kennard (1970)).

En el modelo

$$y = \beta_0 \mathbf{1} + \beta W + \varepsilon ,$$

el estimador de mínimos cuadros de  $\underline{\beta}$  es

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\beta}} &= (W'W)^{-1}W'y \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j^{-1} C_j v_j \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $C_j = v_j'W'y$ . En la expresión (23) se puede observar - claramente el efecto que puede tener sobre  $\hat{\underline{\beta}}_i$  un valor de -

$\lambda_j \approx 0$ . El estimador ridge se obtiene adicionando una constante  $k$  a los elementos de la diagonal de  $W'W$ , dando esto como resultado el siguiente estimador,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \tilde{\beta}(k) = (W'W + kI)^{-1}W'y \\ &= \sum_{j=1}^P (\lambda_j + k)^{-1} C_j y_j.\end{aligned}\quad (24)$$

Si se comparan las expresiones (23) y (24), puede observarse en (24) que la adición de un valor de  $k$ , aunque sea pequeño, a las raíces características con magnitudes cercanas a cero, reduce la influencia que tienen los vectores que -- identifican las multicolinealidades sobre los estimadores. Si  $k$  es suficientemente pequeña, vectores característicos con raíces características grandes tendrán aproximadamente la misma influencia en  $\hat{\beta}$  y en  $\tilde{\beta}$ .

Las propiedades del estimador de regresión ridge,  $\tilde{\beta}$ , han sido estudiadas con gran detalle por muchos investigadores -- (Ver Zárate (1976)). La más sobresaliente de ellas que garantiza que  $\tilde{\beta}$  estará más cerca de  $\beta$  que  $\hat{\beta}$ , es que

$$0 < k < \sigma^2 / \beta' \beta .$$

Idealmente se debe seleccionar un valor de  $k$  que satisfaga la desigualdad dada anteriormente, pero como la cota superior es desconocida es imposible garantizar que  $k$  sea -- elegido de tal forma. Debido a eso Hoerl y Kennard (1970) propusieron una técnica, conocida como la Traza Ridge, que

permite seleccionar un valor adecuado de  $k$ . Este método consiste en graficar valores de  $k$  en el intervalo  $(0,1)$ , contra los valores de  $\tilde{\beta}_1(k)$  obtenidos. Los estimadores asociados a variables involucradas en multicolinealidades cambian drásticamente de magnitud cuando  $k$  aumenta de valor. Los cambios de magnitud, y aún de signo, de dichos coeficientes pronto se estabiliza y después cambian muy gradualmente. Los coeficientes estimados por variables predictoras no multicolineales no cambian dramáticamente, solo gradualmente cuando  $k$  se incrementa. El valor de  $k$  que se debe seleccionar es aquel que no produce cambios dramáticos en los coeficientes afectados por las multicolinealidades. En el proceso de selección del valor de  $k$ , todas las variables tanto las predictoras como la dependiente ( $y$ ) deberán ser estandarizadas como en (5).

Los FIV en regresión ridge se encuentran en la diagonal de la matriz

$$(W'W+kI)^{-1}W'W(W'W+kI)^{-1} . \quad (25)$$

#### EJEMPLO

En el objeto de ilustrar las metodologías descritas, considere un problema de regresión que involucra tres variables predictoras y un total de 26 observaciones, a las cuales se les ajusta el modelo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \epsilon_i . \quad (26)$$

En la tabla 1 se muestran las observaciones, así como algunos resultados relevantes al análisis.

TABLA 1.

Obs	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y	Obs	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y	Obs	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y
1	12.11	1.72	5.34	47.65	10	13.67	7.93	-2.18	38.40	19	13.43	8.87	-2.50	34.
2	11.82	6.90	1.72	35.09	11	11.10	5.70	4.33	35.85	20	12.31	10.11	-0.72	29.
3	13.32	3.33	1.34	46.89	12	13.09	3.59	2.04	46.42	21	14.91	11.31	-7.17	33.
4	13.89	3.99	0.19	48.54	13	11.83	2.59	4.09	45.32	22	10.42	4.29	5.83	37.
5	10.26	0.79	9.04	44.92	14	13.09	6.77	-0.32	39.79	23	16.18	2.30	2.10	59.
6	12.75	10.05	-1.69	29.85	15	15.10	4.89	-2.02	48.61	24	14.99	4.83	4.11	58.
7	13.53	6.25	-2.02	37.03	16	13.08	4.07	1.69	46.01	25	14.14	3.16	8.55	49.
8	10.85	5.61	4.53	35.86	17	14.31	2.25	0.95	52.38	26	16.59	8.61	9.00	56.
9	10.48	6.19	4.49	33.08	18	12.51	6.58	0.84	38.26					

Correlaciones	FIV	Raíces Carac (λ)
$r_{X_1, X_2} = 0.15$	1.09	1.72
$r_{X_1, X_3} = -0.28$	1.53	0.88
$r_{X_2, X_3} = -0.59$	1.62	0.39

FV	g.l.	S.C.	CM	F	PR>F	R <sup>2</sup>	Parámetro	Estimador	Error estándar	F Parcial
Regresión	3	1787.663	595.89	183.74	0.0001	0.96	$\beta_0$	-0.43	3.15	
Error	22	71.347	3.24				$\beta_1$	3.95	0.22	319.6
Total	25	1859.010					$\beta_2$	-1.75	0.16	125.2
							$\beta_3$	0.65	0.12	30.8

Un examen cuidadoso de los resultados obtenidos en la tabla 1, muestra que no existe evidencia de algún problema potencial en el ajuste del modelo de regresión, los indicadores de multicolinealidad como son las correlaciones entre las variables predictoras (0.15, -0.28, -0.59), los FIV (1.09,

1.53, 1.62) y las raíces características de la matriz de correlaciones (1.72, 0.88, 0.39) se encuentran todos dentro de los límites razonables.

*Puntos de influencia.*

La primera indicación de problemas surge al observar los elementos de la diagonal de la matriz  $H=X(X'X)^{-1}X'$ , los residuales estudentizados ( $t_i$ ) la estadística de Cook ( $D_i$ ), y los residuales ( $\hat{r}_i$ ) estos resultados se muestran a continuación en la Tabla 2.

TABLA 2.

Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$	Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$	Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$
1	.12	-0.14	.0009	-0.24	10	0.09	0.10	.0003	0.16	19	.11	-0.31	.0037	-0.51
2	.07	-0.02	.0000	-0.04	11	0.10	-0.24	.0023	-0.41	20	.16	-0.49	.0153	-0.79
3	.09	-0.19	.0011	-0.32	12	0.07	0.05	.0000	0.08	21	.29	-0.10	.0013	-0.15
4	.09	0.58	.0116	0.97	13	0.10	0.53	.0101	0.88	22	.15	0.40	.0096	0.66
5	.25	0.18	.0037	0.27	14	0.05	0.36	.0024	0.62	23	.26	-0.91	.0951	-1.38
6	.15	-0.82	.0382	-1.53	15	0.16	-0.44	.0123	-0.71	24	.12	<u>3.51</u>	.5643	<u>5.79</u>
7	.09	-0.11	.0004	-0.19	16	0.06	0.47	.0046	0.80	25	.20	<u>-3.36</u>	.9544	<u>-5.28</u>
8	.12	0.19	.0016	0.32	17	0.16	-0.25	.0041	-0.40	26	<u>.74</u>	0.95	.8338	0.86
9	.15	0.03	.0000	0.04	18	0.05	0.17	.0005	0.29					

En la Tabla 2 puede observarse que  $h_{26}=0.74$  excede el límite propuesto por Welsh (1978), dado en la desigualdad (10), pues en este caso

$$h_{26} = 0.74 > \frac{2(4)}{26} = 0.307,$$

lo cual es una indicación que la observación 26 es un punto de influencia. Este mismo dato tiene asociados valores de

$t_{26} = 0.95$ ,  $D_{26} = 0.8338$  y  $r_{26} = 0.86$ . Las observaciones 24 y 25 aunque tienen valores de  $h_{24} = 0.12$ ,  $h_{25} = 0.20$ ,  $D_{24} = 0.5646$  y  $D_{25} = 0.9544$ , los cuales no son grandes, si presentan valores en los residuales estudentizados  $t_{24} = 3.51$ ,  $t_{25} = -3.56$  y en los residuales  $r_{24} = 5.79$  y  $r_{25} = -5.28$  que inducen a considerarlos como puntos de influencia. Lo anterior conduce a eliminar los puntos 24, 25 y 26. En la Tabla 3, se muestran los  $h_i$ ,  $t_i$ ,  $D_i$  y  $r_i$  obtenidos después de eliminar las observaciones 23, 24, 25 y 26. El dato 23 se eliminó debido a que después de eliminar los datos 24, 25 y 26 reportó valores de  $h_{23} = .91$ ,  $t_{23} = 1.75$ ,  $D_{23} = 7.82$  y  $r_{23} = .25$ , un valor tan alto de  $D_i$  indica que se debe suprimir esta observación.

TABLA 3. Eliminando las observaciones 23, 24, 25 y 26.

Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$	Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$	Obs	$h_i$	$t_i$	$D_i$	$r_i$
1	.20	-0.63	.0523	-.25	9	.19	-0.58	.0275	-.23	17	.25	-1.06	.1263	-.11
2	.08	-0.09	.0502	-.04	10	.09	0.75	.0186	.32	18	.05	0.73	.0098	-.01
3	.18	-2.12	.3230	-.86	11	.18	-0.29	.0063	-.12	19	.12	-0.86	.0328	-.11
4	.12	1.98	.1530	.82	12	.09	0.06	.0001	.03	20	.31	0.15	.0034	-.01
5	.27	-0.20	.0553	-.08	13	.36	-0.42	.0358	-.15	21	.42	-0.23	.0131	-.01
6	.19	-1.77	.2526	-.71	14	.05	1.57	.0483	.68	22	.20	0.35	.0108	-.01
7	.09	0.29	.0526	.12	15	.31	-0.63	.0597	-.23					
8	.13	0.69	.0534	.28	16	.07	1.72	.0794	.73					

Es claro que en la Tabla 3 no se observa ninguna anomalía en cuanto al problema de puntos de influencia.

*Detección de multicolinealidad.*

En la Tabla 4 se muestran, para las 22 observaciones restantes, varios resultados relevantes al ajuste de el modelo dado en (26).

TABLA 4. (Eliminando observaciones 23, 24, 25 y 26).

A N V A								
F.V.	g.l.	SC	CM	F	R <sup>2</sup>	Correlaciones	FIV	
Regresión	3	940.723	313.58	1496.13	0.996	$r_{X_1, X_2} = .27$	60.85	
Error	18	3.773	3.773	0.21		$r_{X_1, X_3} = -.84$	41.36	
Total	21	944.516	944.516			$r_{X_2, X_3} = -.75$	128.11	
Parámetros	Estimador	Error estandar	F Parcial	PR>F	Raíces y vect. característicos			
					$\lambda_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
Interceptada	28.85	5.62			2.2794	.55	-.66	-.51
$\beta_1$	2.23	0.55	16.2	.0008	-0.7262	.51	.75	-.42
$\beta_2$	-2.51	0.22	126.8	.0001	0.0044	-.66	.03	-.75
$\beta_3$	-0.30	0.31	0.9	.3478				

Al observar los indicadores de multicolinealidad que se presentan en la Tabla 4, se observa que las correlaciones  $r_{X_1, X_3} = -0.84$  y  $r_{X_2, X_3} = -0.75$  se aproximan a uno, la raíz característica más pequeña  $\lambda_3 = 0.0044$  tiene un valor cercano al cero y el  $FIV(3) = 128.11$  posee una magnitud muy grande, revelándose con todo esto una dependencia potencial entre -

las variables predictoras. Debe notarse que lo dicho anteriormente no fue evidente cuando se usaron las 26 observaciones, las cuales contenían a 4 puntos de influencia (observaciones 23, 24, 25 y 26).

De la expresión (17) se sabe que si una raíz característica tiene un valor cercano a cero, en este caso  $\lambda_3 = 0.0044 \approx 0$ , se tiene que

$$v_{31}w_1 + v_{32}w_2 + v_{33}w_3 \approx 0$$

por lo tanto, de acuerdo a los resultados de la Tabla 4, se tiene,

$$-0.51 w_1 - 0.42 w_2 - 0.75 w_3 \approx 0$$

o bien

$$w_3 \approx -0.68 w_1 - 0.56 w_2. \quad (27)$$

La expresión (27) muestra el tipo de relación lineal - - - existente entre las variables predictoras.

#### *Los datos.*

Una vez detectados los puntos de influencia y una multicolinealidad, ha llegado el momento que el analista de datos debe reflexionar, o en su caso preguntar al investigador, si dentro del contexto de su problema existe alguna razón que explique la presencia de puntos de influencia, y la relación existente entre las variables predictoras.

Antes de proceder con la solución al problema de multicolinealidad, se explicará como se obtuvieron los datos a los cuales se les ajustó el modelo dado en (26). Las primeras 22 observaciones fueron generadas de acuerdo a la siguiente expresión

$$Y_j = 18 + 2.8X_{1j} - 2.3X_{2j} + e_{1j} \quad j=1,2,\dots,22$$

donde  $X_1$ ,  $X_2$  y  $e_1$  son variables aleatorias tales que  $X_1 \sim N(13, 2.28)$ ,  $X_2 \sim N(5.5, 9.4)$  y  $e_1 \sim N(0, 0.27)$ . La variable  $X_3$  se generó usando la expresión

$$X_{3j} = -1.8X_{1j} - 0.7X_{2j} + 28 + 0.9e_{2j} \quad j=1,2,\dots,22 \quad (28)$$

donde  $e_2 \sim N(0, 0.14)$ . Es preciso hacer notar la similitud entre la expresión (27) que se obtuvo mediante el análisis de las raíces y vectores característicos, y la ecuación (28) que revela la verdadera fuente de multicolinealidad.

Las últimas 4 observaciones (observaciones 23, 24, 25 y 26) fueron generadas de tal forma que se encontrarán en la frontera del más pequeño conjunto convexo, que contiene a todos los puntos  $\underline{x}$  del diseño. A este conjunto se le denota por IVH. La característica que causa que  $h_i$  y  $t_i$  sean grandes es que

$$\underline{x}'(X'X)^{-1}\underline{x} \leq \max_i h_i. \quad (29)$$

La desigualdad dada en (29) muestra que los puntos con ma--

yor varianza en los valores predcidos deberán estar en la frontera del IVH. En general se puede anticipar que el -- punto diseño correspondiente al  $\max_i$  deberá estar en la - frontera del IVH, en una región donde la densidad de los - puntos diseño es relativamente pequeña. De esta forma se buscó que los puntos 23, 24 y 25 tuvieran residuales relativamente grandes. En cambio la observación 26 se eligió en el plano de  $X_1$  y  $X_2$  con la condición de que tuviera un - residual más pequeño.

#### *Análisis de regresión ridge.*

Como una opción a la solución del problema de multicolinealidad se ilustra el uso de la técnica conocida como Análisis de Regresión Ridge, la cual ha sido descrita líneas -- arriba. Con el objeto de calcular la cantidad de sesgo -- que se introducirá en el estimador ridge y con esto determinar el valor de  $k$ , es necesario analizar el modelo con - todas las variables (dependiente y predictoras) usando la estandarización definida en (5), los estimadores de  $\beta$  obtenidos de esta forma se denominarán *Coefficientes Basados en la Correlación* (CBC) (Marquardt y Snee (1975)).

En la Tabla 5 se muestran los resultados obtenidos para - las 22 observaciones que quedaron después de eliminar los puntos de influencia (observaciones 23, 24, 25 y 26).

TABLA 5. (Eliminando observaciones 23, 24, 25 y 26).

Variable	FIV		Coeficientes Basados en la Correlación (CBC)				
	Mínimos Cuadrados	Mínimos Cuadrados	k=.01	k=.02	k=.03	k=.04	k=.05
w <sub>1</sub>	60.85	0.47	0.578	0.590	0.590	0.586	0.581
w <sub>2</sub>	41.36	-1.08	-0.969	-0.939	-0.921	-0.906	-0.891
w <sub>3</sub>	128.11	-0.16	0.012	0.043	0.056	0.063	0.068
Máximo FIV	128.11		12.05	4.31	2.26	1.43	1.05

En la tabla 5 puede observarse que una buena elección de k es la de k=0.02, valor donde se han estabilizado las magnitudes de los coeficientes. El estimador ridge será entonces obtenido como

$$\tilde{\beta}(0.02) = [W'W + 0.02I]^{-1} W'y.$$

En la tabla 5 se muestran los CBC calculados por mínimos cuadrados y por regresión ridge para varios valores de k. La interpretación práctica que puede dárseles es la de que un CBC, digamos b, es el cambio esperado en y, medido en y-desviaciones estandares, dado que la correspondiente variable predictora, digamos w, se ha incrementado en una desviación estandar, así por ejemplo, b=0.5 implica que y se incrementa en 0.5 desviaciones estandar cuando w aumenta en una desviación estandar.

En vista de la magnitud del CBC asociado a la variable w<sub>3</sub> se puede decidir eliminar a dicha variable. La estrategia

de eliminar a  $w_3$  solamente basados en la magnitud de su --  
 CBC es acertada, dado que en un modelo casi ortogonal los --  
 DBC tienen aproximadamente la misma varianza.

PRUEBAS DE F PARCIALES

Las pruebas de F parciales, las cuales son usadas en varios  
 procedimientos de selección de variables, se pueden ver muy  
 afectadas por la presencia de puntos de influencia. A con-  
 tinuación se explica la aseveración.

Si  $\hat{\beta}_m$  denota el m-ésimo componente de  $\hat{\beta}$  y  $T_m = \hat{\beta}_m / S(\ell_m)^{1/2}$ , don-  
 de  $\ell_m$  es el m-ésimo elemento de la diagonal de  $(X'X)^{-1}$ , entonces la esta-  
 dística de F parcial,  $F_{m(i)}$ , para el conjunto de datos don-  
 de se ha eliminado el i-ésimo punto, puede expresarse como

$$F_{m(i)} = \frac{(n-p-2) \left[ T_m - \gamma t_i (g_i)^{1/2} \right]^2}{(n-p-1-t_i^2) (1+\gamma^2 g_i)}, \tag{30}$$

donde  $t_i$  esta definida en (11), y es la correlación entre -  
 $\hat{\beta}_m$  y  $x_i \hat{\beta}$  y  $g_i = h_i / (1-h_i)$ . De (30) puede observarse que:

- a). Si  $t_i^2 > 1$  y  $\gamma(g_i)^{1/2}$  es negligible, entonces  $F_{m(i)} > F_m$ . De  
 tal forma que si se elimina un punto con una  $t_i^2 > 1$  situa-  
 do en una región densa de IVH, se incrementará la magni-  
 tud de todas las F parciales.

b). Si  $t_i^2 < 1$ ,  $F_m > 1$  y  $\gamma(g_i)^{1/2}$  es suficiente grande, entonces --  $F_{m(i)} < F_m$ . Por lo tanto se espera que todas las  $F_m > 1$  decrecerán cuando se elimina un punto ( $t_i^2 \leq 1$ ) situado en la frontera del IVH.

En las Tablas 1 y 4 se muestran los valores de F parciales antes y después de haber eliminado los puntos de influencia respectivamente, observándose un cambio en magnitud muy grande, sobre todo para las correspondientes a  $\beta_1$  (de 319.6 cambio a 16.2) y a  $\beta_3$  (de 30.8 cambio a 0.9).

#### COMPUTACION

Los procedimientos numéricos que se emplearon para obtener los diferentes indicadores ( $r_i$ ,  $h_i$ ,  $t_i$ ,  $D_i$ ,  $\lambda_i$ ) tanto de los puntos de influencia como de multicolinealidad, fueron hechos usando como base la descomposición singular de X (o W en su caso), la cual tiene la forma

$$X = U_1 \Lambda_1^{1/2} V_1'$$

$$W = U_2 \Lambda_2^{1/2} V_2'$$

donde  $U_1' U_1 = I$ ,  $U_2' U_2 = I$ ,  $V_1$  y  $V_2$  son ortogonales y  $\Lambda_1^{1/2}$  y  $\Lambda_2^{1/2}$  son matrices diagonales. Usando dicha descomposición se obtiene:

$$H = U_1 U_1'$$

$$\hat{\beta} = V_2 \Lambda_2^{-1/2} U_2' y ,$$

$$(W'W)^{-1} = V_2 \Lambda_2^{-1} V_2' ,$$

$$\tilde{\beta}(k) = V_2 (\Lambda_2^{1/2} + kI)^{-1} \Lambda_2^{1/2} U_2' y .$$

Usando las expresiones anteriores resulta fácil y precisa la obtención de los indicadores usando el paquete estadístico SAS. La última versión de dicho paquete proporciona (aunque con menos precisión que la presentada en el trabajo) los indicadores  $t_i$ ,  $D_i$  y  $r_i$  directamente.

#### COMENTARIOS FINALES

En el presente trabajo se han presentado varios indicadores de puntos de influencia y de multicolinealidad, que pueden usarse con el propósito de revelar información relevante contenida tanto en los datos como en las variables. Por medio de un ejemplo se han examinado las consecuencias que pueden traer consigo el procesamiento de datos, sin antes examinar cuidadosamente la estructura del modelo, y de la información que se va a usar para estimarlo.

En muchas ocasiones, una vez detectados los puntos de influencia, los investigadores proceden a utilizar métodos robustos de estimación como los sugeridos por Huber (1972) o Andrews (1974). Sin embargo se debe tener extrema precau-

ción al usar tales métodos sin antes llevar a cabo un cuidadoso escrutinio de las observaciones, en innumerables ocasiones es mejor eliminarlas, aunque esto último también no es un paso que se debe de tomar automáticamente. En la solución del problema de multicolinealidad, se ha sugerido el uso de la regresión ridge ya que es una metodología que en incontables ocasiones proporciona resultados aceptables, -- sin embargo existen otras técnicas como la eliminación de las variables afectadas, las propuestas por Marquardt (1970), la de componentes principales (ver Mansfield et al (1977)) y el método de las raíces características de Webster et al -- (1974), que pueden producir mejores resultados que los de regresión ridge, la decisión de usar cualquiera de los métodos, deberá ser consecuencia de un análisis minucioso de la naturaleza y fuente de las multicolinealidades.

Se espera que de las consideraciones discutidas en el trabajo, se desprenda la conclusión de que la automatización de los métodos estadísticos no deben conducir a el uso de los mismos como simples rutinas de cálculo, sino que debe usarse como un ingrediente más del análisis y el proceso de los datos (Tukey 1972).

## BIBLIOGRAFIA

1. Andrews, D.F. and Pregibon, D. (1978). Finding Outliers that matter. *Journal of the Royal Statistical Society*. Vol. 40, N° 1. 85-93.
2. Cook, D.R. (1979). Influential observations in linear regression. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 74, N° 365. 169-174.
3. Cook, D.R. (1977). Detection of influential observations in linear regression. *Technometrics*, Vol. 19, N° 1 15-18.
4. Cook, D.R. and Weisberg, S. (1980). Characterization of and empirical influence function for detecting influential cases in regression. *Technometrics* - Vol. 22, N° 4. 495-508.
5. Hoaglin, D.C. and Welsch, R.E. (1978). The hat matrix in regression and ANOVA. *The American Statistician*. Vol. 32, N° 1. 17-22.
6. Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970). Ridge regression Applications to nonorthogonal problems. - - - *Technometrics*. Vol. 12. 69-82.
7. Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970). Ridge regression. Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*. Vol. 12. 55-67.
8. Huber, P.J. (1972). Robust statistics: a review. - - *Annals of Mathematical Statistics*, 43. 1041-67.
9. Johnson, W. and Geisser, S. (1983). Predictive view of the detection and characterization of influential observations in regression analysis. *Journal of -- the American Statistical Association*. 137-144.
10. Mansfield, E.R., Webster, J.T. and Gunst, R.F. (1977). An Analytic Variable Selection Technique for - - Principal Component Regression. *Applied Statistics*, 26, 34-40.
11. Mansfield, E.R. and Helms, B.P. (1982). Detecting - - Multicollinearity. *The American Statistician* Vol. 36, N° 3. 158-162.

12. Mason, R.L., Gunts, R.F. and Webster (1975). Regression Analysis and Problems of Multicollinearity. Communications in Statistics, 4, 277-292.
13. Marquardt, D.W. (1970). Generalized inverses, - - Ridge regression, biased linear estimation and nonlinear estimation. Technometrics Vol. 12, N° 3. 591-612.
14. Marquardt, D.W. and Snee, R.D. (1975). Ridge Regression in Practice. The American Statistician Vol. 29, - - N° 1, 3-20.
15. Tukey, J.W. (1976). Data analysis, computation and - - Mathematics. Quarterly of Applied Mathematics, 30. 51-65.
16. Velleman, P.F. and Welsch, R.E. (1981). Efficient - - Computing of regression diagnostics. The American Statistician Vol. 35, N° 4. 234-242.
17. Webster, J.T., Gunts, R.F. and Mason, R.L. (1974). - - Latent root regression analysis. Technometrics - - Vol. 16, N° 4. 513-522.
18. Zárate de Lara G. (1976). Directionally minimax mean square error estimation in linear models. Unpub Ph.D. Thesis., Dept. of Statistics, N.C.S.U. Raleigh, N.C.



## GEOMETRIA Y TOPOLOGIA EN VARIEDADES

Guillermo Pastor

Departamento de Matemáticas  
CINVESTAV - IPN

La geometría es el estudio de ciertas propiedades de las figuras geométricas en el plano o en el espacio. No todas las propiedades son de interés, solo las "propiedades geométricas". Decimos que dos figuras son geoméricamente equivalentes si mediante un movimiento rígido podemos llevar una sobre otra de tal manera que las dos figuras coincidan. Las propiedades comunes a las figuras geoméricamente equivalentes se llaman propiedades geométricas. Por ejemplo, las siguientes propiedades son geométricas:

- 1) El área de un polígono.
- 2) El número de vértices de un polígono.
- 3) La longitud de una curva.

Imaginemos que nuestras figuras están hechas de hule y que podemos apachurrarlas, estirarlas, torcerlas, y aún cortarlas, anudarlas y volver a pegarlas. Diremos que dos figuras son topológicamente equivalentes si podemos obtener una

de la otra mediante este tipo de modificaciones. La topología estudia las propiedades (topológicas) que permanecen invariantes bajo estos cambios. Observemos que las 3 propiedades mencionadas en el párrafo anterior no son topológicas.

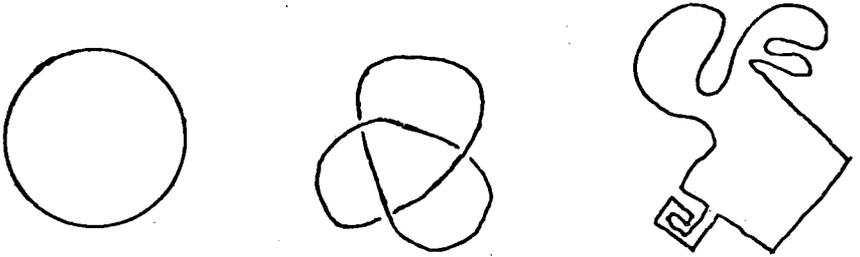
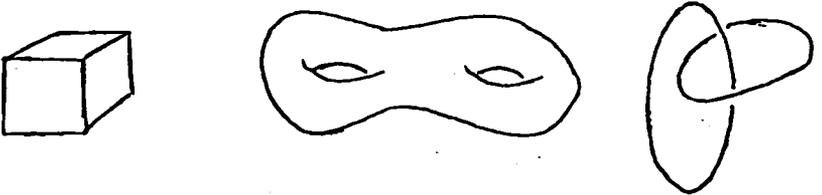


Fig. 1. (a) Figuras topológicamente equivalentes.



(b) Figuras no equivalentes topológicamente.

Entre las figuras geométricas más simples se encuentra

el triángulo. Una de sus propiedades más interesantes es que la suma de sus ángulos internos es  $180^\circ$  ó  $\Pi$  (en radianes). La generalización del triángulo es el polígono de  $n$  lados. Descomponiendo el polígono en  $(n-2)$  triángulos uno observa que la suma de los ángulos internos de un polígono de  $n$  lados es  $(n-2)\Pi$ . Esta es una propiedad geométrica de los polígonos. Sin embargo, todos los polígonos son topológicamente equivalentes entre sí y bajo este punto de vista es mejor considerar que tan doblado está el polígono en un vértice dado. Si  $\alpha_i$  denota el ángulo interno en el vértice  $i$ , entonces  $\Pi - \alpha_i$  es una medida de cuanto está doblado el polígono en el vértice  $i$ . Sumando sobre todos los vértices obtenemos

$$\sum (\Pi - \alpha_i) = n\Pi - \sum \alpha_i = 2\Pi$$

donde  $n$  es el número de vértices (ó lados) del polígono. Esta suma siempre es  $2\Pi$  y por lo tanto no depende del polígono en cuestión. Esta es una propiedad topológica de todos los polígonos.

Generalizemos la ecuación anterior para poliedros. Aquí adoptamos la terminología de los topólogos: un poliedro es una colección de vértices, aristas y caras pegadas de tal manera que cualquier arista es incidente en exactamente dos caras. Debemos pensar esta colección como pegada en abstracto

ya que en algunos casos no podemos visualizarla en el espacio ambiente. Bajo este punto de vista, los poliedros son modelos rectilíneos de superficies

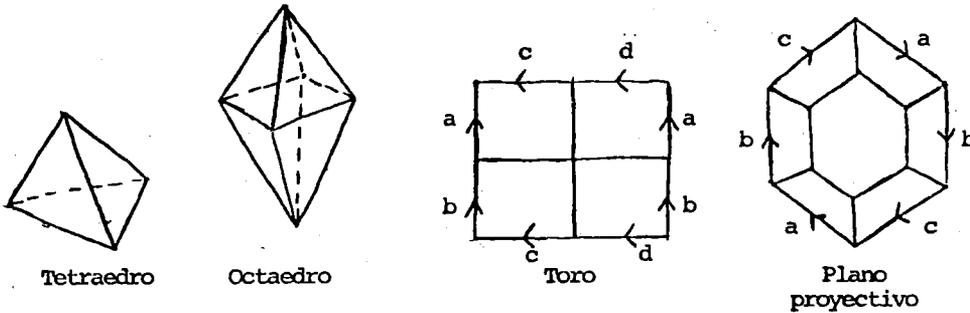


Fig. 2 Ejemplos de Polígonos

Consideremos un poliedro compuesto de  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras. Para cada vértice  $i$  sea  $\sigma_i$  la suma de los ángulos de las caras en el vértice  $i$  y denotemos por  $\delta_i$  a la diferencia  $2\pi - \sigma_i$ .  $\delta_i$  es llamado el defecto angular en el vértice. Sumando sobre todos los vértices obtenemos

$$\Delta = \sum_{i=1}^V \delta_i = 2\pi V - \sum_{i=1}^V \sigma_i$$

Queremos calcular  $\Delta$ . Si  $s_j$  denota el número de lados de la cara  $j$  se tiene

$$\sum_{i=1}^V \sigma_i = (s_1 - 2)\pi + \dots + (s_C - 2)\pi = 2\pi(A - C)$$

De donde obtenemos la fórmula

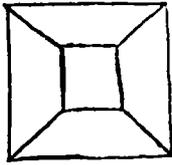
$$(*) \quad \Delta = 2\pi(V - A + C)$$

Por lo tanto  $\Delta$  sólo depende del número de vértices, aristas y caras de nuestro poliedro. ¿Cuánto vale entonces  $V - A + C$ ?

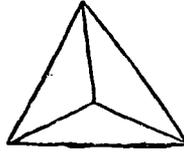
Restrinjámonos por ahora al caso de poliedros topológicamente equivalentes a la esfera. Ya vimos que

$$\sum \sigma_i = 2\pi(A - C)$$

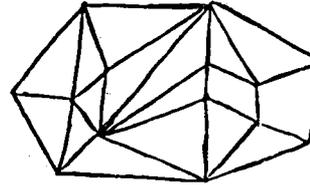
y que este número permanece invariante bajo cambios continuos. Escojamos una cara, la "base", y estirémosla hasta que el poliedro pueda proyectarse ortogonalmente sobre la base. El resultado es un poliedro aplanado con dos hojas superpuestas: la "inferior" es la base no dividida y la hoja "superior" dividida en  $(C - 1)$  polígonos. La figura 3 muestra el resultado de esta proyección para (a) un cubo, (b) un tetraedro, (c) un poliedro "general"



(a)



(b)



(c)

Figura 3.

Computemos ahora la suma de los ángulos de las caras,  $\sum \sigma_i$ , que sabemos es la misma que para nuestro poliedro original. La suma total consta de 3 partes:

- a) La suma de los ángulos de la base, que es  $(r - 2)\pi$ , donde  $r$  es el número de lados de la base.
- b) La suma de los ángulos del perímetro de la hoja superior, que también es  $(r - 2)\pi$ .
- c) La suma de los ángulos del interior de la hoja superior, que es  $2\pi(v - r)$ .

De las tres partes obtenemos

$$\sum \sigma_i = 2\pi v - 4\pi$$

y de la ecuación (\*) deducimos que

$$V - A + C = 2$$

para cualquier poliedro topológicamente equivalente a la esfera.

Un resultado clásico de topología afirma que dados dos poliedros topológicamente equivalentes sus sumas  $V - A + C$  son iguales. Este número se llama la característica de Euler del poliedro  $P$  y se denota por  $\chi(P)$ . La siguiente tabla muestra algunas superficies y sus correspondientes características de Euler

Superficie	$\chi$
esfera	2
plano proyectivo	1
toro, botella de Klein	0
toro doble	-2
toro triple	-4

En resumen, hemos demostrado:

**TEOREMA.** Sean  $P$  y  $P'$  poliedros topológicamente equivalentes. Si  $\Delta(P)$  denota la suma de los defectos angulares,

$$\Delta(P) = 2\pi \chi(P).$$

En particular,

$$\Delta(P) = \Delta(P').$$

El defecto angular de un vértice es una medida de la "aplanabilidad" del poliedro en dicho vértice. Los vértices son denominados llanos, esféricos o hiperbólicos si su defecto angular es cero, positivo o negativo, respectivamente. El poliedro de la figura 4 contiene dos vértices llanos (ll), diez esféricos (e) y dos hiperbólicos (h).

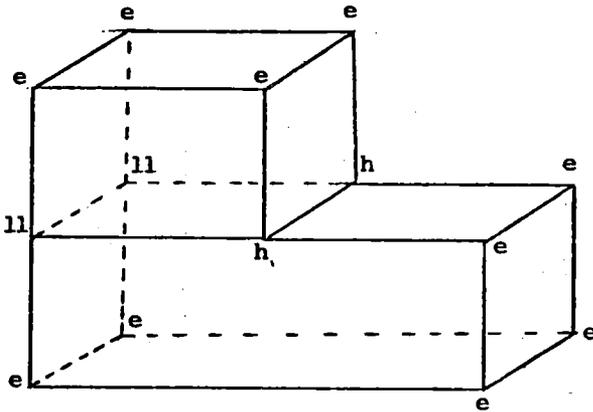


Figura 4.

$\Delta(P)$  es por lo tanto una medida global de como se dobla un poliedro  $P$ . Nuestro teorema afirma que aún cuando

el defecto angular en un vértice no es una propiedad topológica, la suma de todos los defectos angulares,  $\Delta(P)$ , sí lo es.

Por ejemplo, si un modelo poliedrico del toro tiene vértices esféricos, entonces deberá tener al menos un vértice hiperbólico. Cualquier modelo poliédrico de un toro doble o toro triple contiene vértices hiperbólicos.

En el caso de la esfera,  $\chi = 2$ , los poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, etc.) son modelos rectilíneos con todos los vértices esféricos. Para el toro y botella de Klein existen modelos poliédricos con todos los vértices llanos. Así mismo, para el toro doble existen modelos con todos los vértices hiperbólicos. Sin embargo, estos modelos no pueden ser visualizados en el espacio tridimensional.

Cabe mencionar que nuestro teorema es como una versión discreta del teorema de Gauss-Bonnet, que afirma que para una superficie  $S$  lisa cerrada se tiene

$$\iint_S K \, dA = 2\pi \chi(S)$$

donde  $K$  denota la curvatura gaussiana y  $\iint dA$  la integral con respecto al elemento de área.

René Descartes (1596-1650) y Leonardo Euler (1707-1783) descubrieron de manera independiente nuestro teorema principal para el caso de la esfera, pero ninguno dió una prueba formal. La demostración dada aquí de la fórmula  $\Delta = 2\pi X$  se debe a G. Polya y apareció recientemente en un artículo de P. Hilton y J. Pedersen (+).

La relación entre conceptos geométricos y topológicos es pues muy compleja y fructífera. W. Thurston recibió la medalla Fields en 1982 por su trabajo de estructuras geométricas en variedades de dimensión 3. Sus métodos permiten tratar problemas topológicos de variedades tridimensionales con herramientas geométricas.

---

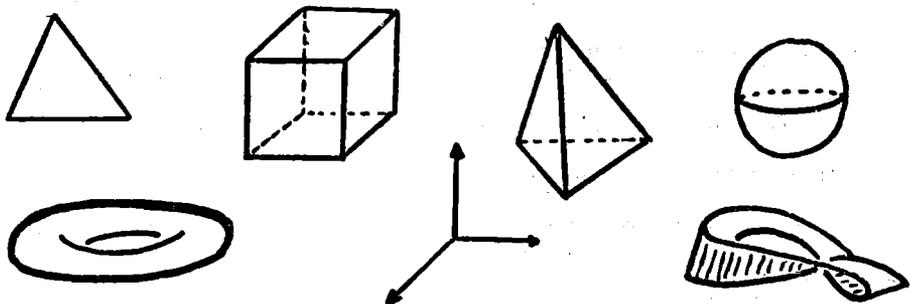
(+) P. Hilton y J. Pedersen, "Descartes, Euler, Poincaré, Polya and Polyhedra", L'Enseignement Math., 27(1981), 327-343.

## ¿QUE ES LA TOPOLOGIA?

Enrique Antoniano

Las raíces griegas de la palabra topología son "topos" que significa lugar, posición o espacio y "logos" que significa tratado o estudio. De acuerdo con esto está decir que la topología es la ciencia del espacio; analiza este concepto e investiga las propiedades de los espacios.

Las raíces de la topología están por un lado, en la geometría, en el hecho de que los cuerpos geométricos son espacios topológicos de manera muy natural:



Por otro lado, están en el análisis matemático, en los conceptos de límite y convergencia y en la necesidad de aclarar el concepto de dimensión, sugerido por el número de variables necesarias para determinar las coordenadas de un punto en el espacio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Las primeras ideas que condujeron al desarrollo del concepto de espacio topológico surgieron de Georg Cantor, quien motivado por cierto problema con las series de Fourier, trataba de determinar los conjuntos donde cierto teorema es válido:

**TEOREMA:** La única serie trigonométrica (es decir, de la forma  $\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ) que converge a cero para todo valor de la variable es la serie nula. El teorema sigue siendo válido si no se supone la convergencia en un conjunto finito ¿y en qué otra clase de conjuntos?

Pero de esto creo que nos hablará más Andrés Sestier durante su conferencia.

A principios de nuestro siglo, después de la gran influencia de Cantor y del esfuerzo de muchos matemáticos, entre quienes destacan Maurice Fréchet, Hermann Weyl y Félix Hausdorff, se logra formalizar una definición satisfactoria de espacio topológico. A continuación incluimos dos de las definiciones más usuales.

Definición: Sea  $X$  un conjunto. Un sistema de vecindades para  $X$  es una función que asigna a cada punto  $x \in X$  una familia de subconjuntos de  $X$  que denotaremos por  $V_x$  de manera que se satisfagan los siguientes axiomas:

- 1.- Para toda  $U \in V_x$ ,  $x \in U$ .
- 2.- Si  $U_1, U_2 \in V_x$ , entonces  $U_1 \cap U_2 \in V_x$ .
- 3.- Si  $U \in V_x$  y  $U \subset V$ , entonces  $V \in V_x$ .
- 4.- Para cada  $U \in V_x$ , existe  $W \in V_x$  tal que  $U \in V_y$  para cada  $y \in W$ .

Definición: Un espacio topológico es un conjunto  $X$ , junto con un sistema de vecindades para él.

Definición: Un espacio topológico es un conjunto  $X$ , junto con una familia de subconjuntos de él, que denotaremos por  $\tau$  y que satisface los

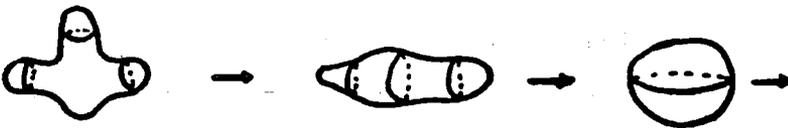
siguientes axiomas:

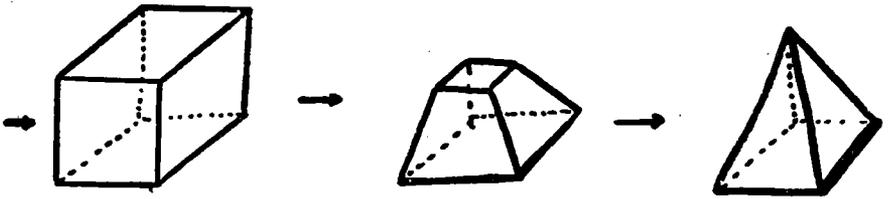
- 1.-  $X, \emptyset \in \tau$
- 2.- Si  $A_1, A_2 \in \tau$ , entonces  $A_1 \cap A_2 \in \tau$
- 3.- Si  $A_i \in \tau$  para toda  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Los elementos de  $\tau$  se llaman los subconjuntos abiertos de  $X$ . Si pensamos que una vecindad de un punto es cualquier conjunto que contiene a un abierto que contiene al punto, no es difícil establecer la equivalencia entre las dos definiciones anteriores de espacio topológico.

En base a esta definición de espacio topológico se pueden establecer las nociones de continuidad, punto de acumulación, cerrado, conexo, compacto, etc., etc. Por ejemplo, una función entre dos espacios topológicos es continua, si como función entre los conjuntos tiene la propiedad de que imágenes inversas de abiertos son abiertos. La teoría desarrollada de esta manera es lo que hoy conocemos por Topología de Conjuntos o Topología General.

Actualmente, la palabra topología es usada para nombrar a la familia de abiertos que determina la estructura topológica de un conjunto. Sin embargo, independientemente de esto, podemos decir que la topología es el estudio de aquellas propiedades de las figuras geométricas que permanecen invariantes cuando deformamos a éstas como si fueran de goma elástica.





Esto nos hace recordar a Leonard Euler (siglo XVIII) quien pensando en el conocido problema de los puentes de Koenigsberg escribió: "La rama de la geometría que trata de las magnitudes ha sido celosamente estudiada en el pasado, pero existe otra rama que ha permanecido casi desconocida hasta ahora. Leibniz fué el primero en tratar de ella, llamándola geometría de la posición (geometría situs). No tiene en cuenta las magnitudes, ni requiere cálculos con cantidades". Pero ahora más que hablar del problema de los puentes, quiero hacerlo acerca de un resultado clásico de topología, conocido como la fórmula de Euler-Poincaré, aunque ésta era ya conocida de Descartes (siglo XVII) "Sean  $v, a, y c$  el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo, entonces:

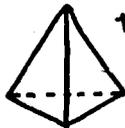
$$v - a + c = 2$$

cubo



$$8 - 12 + 6 = 2$$

tetraedro



$$4 - 6 + 4 = 2$$

octaedro



$$6 - 12 + 8 = 2$$

Más generalmente, definimos la característica de Euler de un poliedro, con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $c$  caras como el número  $\chi$  dado por

$$\chi = v - a + c = 2$$

Los que fueron al curso de Elías Micha ya saben como utilizó la característica de Euler para clasificar las superficies.



$$\chi = 2$$



$$\chi = 0$$



$$\chi = -2$$

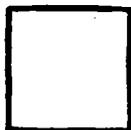
, etc.,...

Por lo pronto, utilizaremos la característica de Euler en un problema más sencillo: Demostrar que solo hay cinco poliedros regulares. Esto ilustra el tipo de argumentos utilizados en esta otra rama de la topología conocida por Topología Combinatoria o Topología Algebraica.

Demostración: Supongamos que tenemos un poliedro con  $c$  caras. Siendo regular, las caras deben estar formadas por polígonos regulares, digamos con  $k$  aristas cada uno y por lo tanto el poliedro tendrá  $\frac{ck}{2}$  aristas.



$$k = 3$$

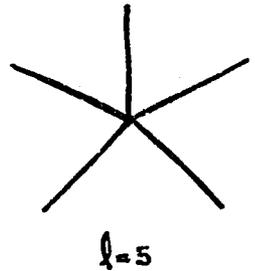
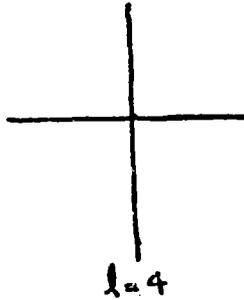
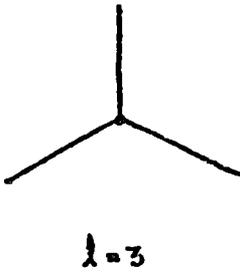


$$k = 4$$



$$k = 5$$

Análogamente, si denotamos por  $\ell$  al número de aristas que inciden en cada vértice, entonces el poliedro tendrá un total de  $ck/\ell$  vértices.



Aplicando la fórmula de Euler-Poincaré, obtenemos:

$$c - \frac{ck}{2} + \frac{ck}{l} = 2.$$

$$\therefore c \left[ \frac{2l - kl - 2k}{2l} \right] = 2$$

Ahora sólo falta resolver esta ecuación diofantina. Para esto, consideremos lo siguiente:

1.- En cada vértice deben incidir por lo menos tres caras ( $l \geq 3$ ). Y cada cara debe tener por lo menos tres aristas ( $k \geq 3$ ).

2.- La suma de los ángulos planos que forman las caras que inciden en un vértice debe ser menor que  $360^\circ$ . Así, el ángulo plano que forman las aristas de las caras debe ser estrictamente menor que  $360^\circ/3 = 120^\circ$ .

Siendo el ángulo que forman las aristas de un hexágono regular igual a  $120^\circ$ , obtenemos que el número de aristas de cada polígono debe ser menor que seis ( $k < 6$ ).

Ahora demos a  $k$  los valores 3, 4 y 5 y consideremos la ecuación en cada caso. No es difícil concluir que las únicas soluciones son:

k	$\lambda$	c	Nombre del Poliedro
3	3	4	tetraedro
3	4	8	octaedro
3	5	20	icosaedro
4	3	6	cubo
5	3	12	dodecaedro

En Topología Algebraica, no solo se asocian a los espacios números, como la característica de Euler; también se les asocian estructuras algebraicas más complejas, como pueden ser grupos, anillos, módulos, etc., etc. En seguida, describiremos una manera de asociar a un espacio, una familia de grupos (uno para cada natural), llamados sus grupos de homotopía.

La definición de estos grupos, como veremos, no es muy difícil y sin embargo, el cálculo de los mismos es terriblemente complicado. Hoy día, todavía no conocemos los grupos de homotopía de espacios relativamente simples, como las esferas.

Denotemos por  $S^n$  a la esfera de dimensión  $n$  y por  $e$  al punto de coordenadas  $(1,0,\dots,0)$ .

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}, \quad e = (1,0,\dots,0)$$

Dado un espacio topológico  $X$ , fijemos un punto  $x_0 \in X$  y consideremos el siguiente conjunto:

$$P_n(X) = \{f: S^n \rightarrow X \mid f \text{ es continua y } f(e) = x_0\}$$

Ahora, consideremos la siguiente relación de equivalencia en  $P_n(X)$ .

Decimos que  $f$  y  $g$  son equivalentes ( $f \sim g$ ) si podemos encontrar una función continua

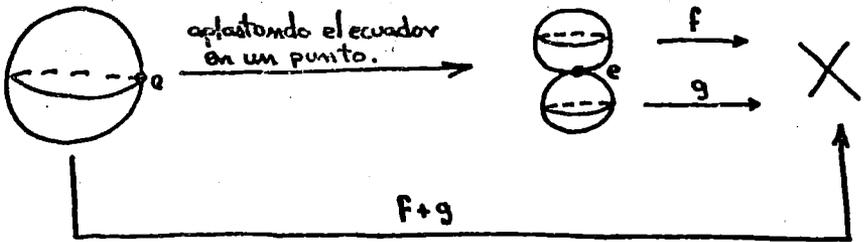
$$H: S^n \times [0,1] \rightarrow X \quad \text{tal que}$$

- 1)  $H(y,0) = f(y) \quad \forall y \in S^n$
- 2)  $H(y,1) = g(y) \quad \forall y \in S^n$
- 3)  $H(e,t) = x_0 \quad \forall t \in [0,1]$

Denotemos por  $\pi_n(X)$  al conjunto de clases de equivalencia, i.e.

$$\pi_n(X) = P_n(X)/\sim$$

Ahora bien, dadas dos clases de equivalencia  $[f]$  y  $[g] \in \pi_n(X)$  podemos elegir representantes  $f, g \in P_n(X)$ . Definimos la función  $f+g \in P_n(X)$ , como se ilustra en el siguiente dibujo:



La operación  $\pi_n(X) \times \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X)$  que manda  $([f],[g])$  a  $[f+g]$  le da a  $\pi_n(X)$  una estructura de grupo (abeliano si  $n > 1$ ).

Uno de los primeros resultados que se pueden obtener, sin recurrir a técnicas demasiado complicadas y que por lo tanto dejamos como ejercicio al lector interesado, es el siguiente:

Proposición: El primer grupo de homotopía de las esferas de dimensión uno es isomorfo a los enteros, i.e.

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

Más aún, la función constante representa a cero, la identidad a uno y en general, la función del plano complejo en sí mismo dada por  $f(z) = z^k$ , cuando la restringimos a  $S^1$  representa a  $k$ .

Ahora para terminar, daremos una demostración del teorema fundamental del álgebra, que utiliza estas ideas.

Teorema Fundamental del Algebra: Un polinomio de grado mayor o igual a 1, con coeficientes complejos, tiene una raíz compleja.

Demostración: Tomemos un polinomio, que podemos considerar mónico para los fines que nos preocupan, y sea éste

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

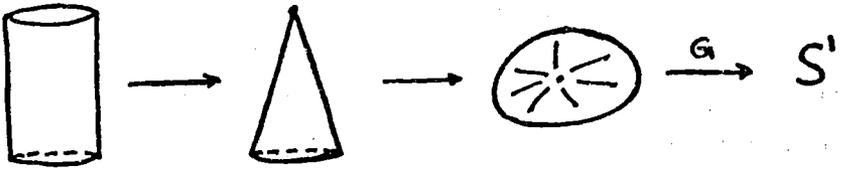
Si suponemos que no tiene raíces, podemos considerar la función continua  $G: \mathbb{C} \rightarrow S^1$  dada por:

$$G(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$$

Restringiendo el dominio de  $G$  a una circunferencia de radio  $R$ , obtenemos una función continua  $g: S^1 \rightarrow S^1$  dada por la misma fórmula, i.e.

$$g(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$$

Observando la siguiente figura, vemos que la función  $g$  es equivalente a la función constante:



y por lo tanto  $[g(z)] = [\text{cte}] = 0 \in \pi_1(S^1)$ .

Ahora obsérvese que si  $t \in [0, 1]$  y  $R > nK$ , con  $K = \text{máx}\{|a_{n-1}|, \dots, |a_0|, 1\}$ , entonces

$$\begin{aligned} |tP(z) + (1-t)z^n| &= |z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \\ &\geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &> R^n - nKR^{n-1} > 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto la expresión

$$H(z, t) = \frac{tP(z) - (1-t)z^n}{|tP(z) - (1-t)z^n|}$$

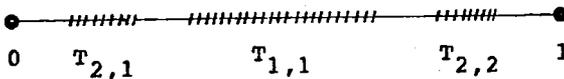
describe una equivalencia entre las funciones  $g(z)$  y  $\frac{z^n}{|z^n|}$  y así  $[g(z)] = [z^n/|z^n|] = n \in \pi_1(S^1)$ , lo cual es una contradicción, pues  $0 \neq n$  en  $\mathbb{Z}$ . Por lo tanto, nuestra hipótesis acerca de que  $P(z)$  no tiene raíces es equivocada.

# CONSTRUCCION DE UNA FUNCION SINGULAR

Luis E. Moreno. \*

## 1: Construcción del conjunto ternario de Cantor.

Partimos del intervalo  $[0,1]$ . Extraemos su tercio central abierto:  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = T_{1,1}$ . Esto nos deja con dos intervalos cerrados  $I_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$  e  $I_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$ . De cada uno de estos extraemos a su vez sus tercios centrales  $T_{2,1}$  y  $T_{2,2}$  respectivamente.



Quedan entonces cuatro intervalos que denotamos (de izquierda a derecha)  $I_{2,1}$ ,  $I_{2,2}$ ,  $I_{2,3}$  e  $I_{2,4}$ .

Esta "extracción del tercio central" (proceso de Cantor) se repite indefinidamente. El conjunto que finalmente queda es el conjunto ternario de Cantor.

La descripción, en términos conjuntistas, del conjunto ternario la podemos dar así: cuando se ha realizado el  $n$ -ésimo paso del proceso, nos quedan  $2^n$  intervalos cerrados  $I_{n,1}$ ,  $I_{n,2}$ , ...,  $I_{n,2^n}$ . Ahora, de cada intervalo  $I_{n,k}$  extraemos su tercio central  $T_{n+1,k}$  lo cual nos deja, en total, con  $2^{n+1}$  intervalos  $I_{n+1,k}$  donde  $k = 1, 2, \dots, 2^n$ .

Sea  $P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ . Entonces, el conjunto de Cantor  $K$ , se

puede expresar como  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ .

En términos numéricos podemos expresar los elementos de  $K$  como aquellos números reales  $t$  cuya expansión en base 3 es del tipo:

$$t = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$$

siendo  $a_i = 0, 2$ . Esto, es bien sabido, quiere decir:

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

Uno pudiera quedarse con la impresión de que el conjunto  $K$  consiste únicamente de aquellos puntos que son los extremos de los intervalos abiertos que se extraen. Esto, empero, no es así: el número  $\frac{1}{4}$  está en  $K$  (véase su expansión ternaria) y no es extremo de ningún  $T_{n,k}$ .

De hecho,  $\frac{1}{4}$  es el número que está en el tercio de la izquierda en cada extracción impar y en el tercio de la derecha en cada extracción par.

## 2: Función de Cantor.

Definamos una función  $\varphi$  cuyo dominio es  $K$  y cuyo rango es todo el intervalo  $[0,1]$ . Si  $t = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$  está en  $K$ , sabemos que  $\frac{a_i}{2} = 0,1$ . Por lo tanto, la correspondencia:

$$t \longmapsto \varphi(t) = 0.b_1b_2 \dots b_n \dots$$

donde cada  $b_i = \frac{a_i}{2}$ , define la función  $\varphi$ .

Nótese que  $\varphi(t)$  representa la expansión binaria de un número de  $[0,1]$ . Claramente, la función  $\varphi$  es sobreyectiva.

Consideremos el intervalo  $T_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Entonces

$\frac{1}{3} = 0.0222\dots$       y       $\frac{2}{3} = 0.2000\dots$  en expansión ternaria. En

tonces

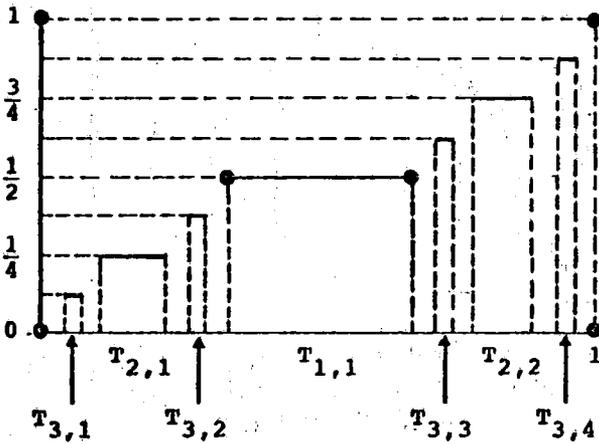
$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

En general, puede mostrarse que  $\varphi$  toma igual valor en los extremos de cada intervalo  $T_{n,k}$ . Además  $\varphi$  es una función creciente (no estrictamente, por supuesto).

Como  $\varphi$  es sobreyectiva entonces  $\varphi$  no puede tener discontinuidades de salto. Sabemos que una función monótona sólo puede tener discontinuidades de salto. Por lo tanto  $\varphi$  es continua.

El hecho que  $\varphi$  toma igual valor en los extremos de cada  $T_{n,k} = (a,b)$  nos permite extender  $\varphi$  al interior de cada uno de tales intervalos definiéndola como  $\varphi(x) = \varphi(a)$  para cada  $x$ ,  $a < x < b$ .

Una gráfica parcial de esta  $\varphi$  extendida (que seguiremos de notando  $\varphi$ ) luce como sigue:

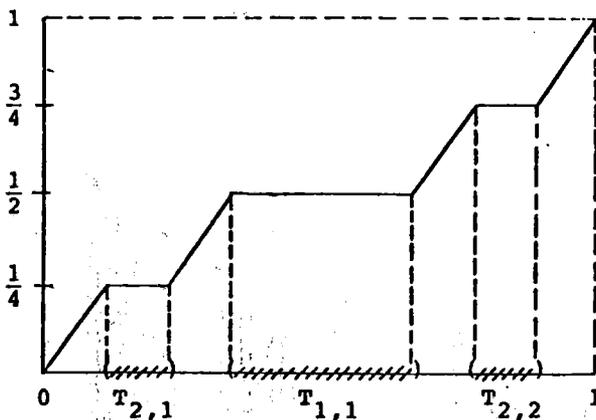


3: Longitud de la gráfica de  $\varphi$ .

Para calcular la longitud  $L(\varphi)$  de la gráfica de  $\varphi$  vamos a definir una sucesión de funciones  $\{P_n\}$  que converge uniformemente a  $\varphi$ . La función  $P_n$  coincide con  $\varphi$  en los intervalos

$T_{n,k}$  ( $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ ). Sobre los intervalos  $I_{n,k}$  definimos  $P_n$  linealmente, uniendo mediante un segmento de recta el extremo derecho de un intervalo  $T_{n,k}$  con el extremo izquierdo de  $T_{n,k+1}$ .

La gráfica de  $P_2$  por ejemplo, luce como sigue:



Cada uno de los  $2^n$  intervalos  $I_{n,k}$  ( $1 \leq k \leq 2^n$ ) que quedan en el  $n$ -ésimo paso del proceso tiene longitud  $3^{-n}$ . Por lo tanto los segmentos ascendentes de la gráfica de  $P_n$  son todos paralelos entre sí.

- La longitud total de la parte ascendente de la gráfica de  $P_n$  es entonces:

$$2^n \left\{ \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \right\} \frac{1}{2}$$

- La longitud total de la parte horizontal de la gráfica de  $P_n$  es entonces:

$$\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- Por lo tanto:

$$L(P_n) = \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

como  $L(\varphi) = \lim_n L(P_n)$ , entonces  $L(\varphi) = 2$ .

Aunque este resultado es muy sencillo, es interesante compararlo con el correspondiente para funciones monótonas  $f$  tales que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  que sean continuamente diferenciables. Para tales funciones  $L(f) < 2$ . La desigualdad es estricta.

4: Derivada de la función  $\varphi$ .

Sean  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2^{n+1}} = 1$  los  $2^{n+1}$  puntos de subdivisión que se obtienen en el  $n$ -ésimo paso del proceso de Cantor.

- Si  $x$  está en alguno de los intervalos extraídos  $T_{n,k}$  entonces  $\varphi'(x) = 0$  pues alrededor de  $x$  la gráfica "es horizontal".
- Veamos que sucede si  $x$  está en  $K$ . Entonces podremos "localizar"  $x$  en algún  $n$ -ésimo paso del proceso de Cantor.

Quiere decir que  $x$  estará en algún intervalo  $I_{n,k}$  donde  $1 \leq k \leq 2^n$ . Denotando  $[a,b]$  tal intervalo, tendremos:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot (b - a)$$

Recordemos la desigualdad:

$$\max \left\{ \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \right\} \geq \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}, \quad \beta > 0, \quad \delta > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \gamma \geq 0.$$

Entonces:

$$\max \left\{ \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{b - x}, \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right\} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

por lo tanto  $\varphi$  no es derivable en  $x$ . Recuérdese que  $x$  es un elemento arbitrario de  $K$ .

5: Conjunto de Cantor de medida positiva.

Dado  $0 < \lambda < 1$  construyamos un conjunto de Cantor  $K(\lambda)$  de medida (de Lebesgue)  $1 - \lambda$ . Para ello, extraemos el intervalo central  $T_{1,1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}\right)$  de longitud  $\frac{\lambda}{3}$ . De cada uno de los intervalos restantes  $I_{1,1}$  e  $I_{1,2}$  extraemos sus tercios cen-

trales de longitud  $\frac{\lambda}{3^2}$  cada uno. Reiteramos este proceso como en el caso del conjunto ternario original. La suma total de las longitudes de intervalos extraídos será:

$$\frac{\lambda}{3} + 2 \frac{\lambda}{3^2} + \dots + 2^{n-1} \left(\frac{\lambda}{3^n}\right) + \dots = \lambda$$

La suma total de longitudes de intervalos extraídos hasta el n-ésimo paso del proceso es:

$$\frac{\lambda}{3} + 2 \frac{\lambda}{3^2} + \dots + 2^{n-1} \frac{\lambda}{3^n} = \lambda \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

que denotamos  $\lambda_n$ .

Como antes, denotamos  $T_{n,k}$   $1 \leq k \leq 2^{n-1}$  los intervalos que se extraen en el n-ésimo paso del proceso; sobre cada uno de estos intervalos definimos  $P_n(\lambda)$  haciendo que sus valores coincidan con los de la  $P_n$  correspondiente al conjunto de Cantor original, en los correspondientes intervalos.

En los intervalos que restan, también definimos  $P_n(\lambda)$  de manera lineal.

Longitud de  $P_n(\lambda)$ .

- La gráfica de  $P_n(\lambda)$  tiene  $2^n - 1$  segmentos horizontales cuya

longitud total es  $\lambda_n = \lambda \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$ .

- La gráfica de  $P_n(\lambda)$  tiene  $2^n$  segmentos ascendentes cuya lon-

gitud total es  $\left\{ (1 - \lambda_n)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$

- De manera que  $L(P_n(\lambda)) = \lambda_n + \left\{ (1 - \lambda_n)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$

Puede mostrarse, de manera sencilla, que  $L(P_n)$  converge a la longitud de  $\varphi_\lambda$ , la nueva función de Cantor. De manera que

$$L(\varphi_\lambda) = \lambda + \left\{ 1 + (1 - \lambda)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Derivada de  $\varphi_\lambda$

Para la función  $\varphi$ , vimos que no es derivable sobre  $K$ . Sin embargo, cabe la posibilidad de que tenga derivadas laterales sobre  $k$ . Vamos a enunciar ahora los resultados propios para  $\varphi_\lambda$ .

Si  $x, y \in [0,1]$  (en algún  $P_n$ ) entonces

$$\frac{P_n(\lambda)(y) - P_n(\lambda)(x)}{y - x} \leq \frac{1}{1 - \lambda_n} < \frac{1}{1 - \lambda}$$

lo cual implica que

$$\frac{\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x)}{y - x} \leq \frac{1}{1 - \lambda}$$

debido a la convergencia  $P_n \rightarrow \varphi_\lambda$ . Esta última desigualdad nos permite afirmar que si  $\varphi_\lambda$  es derivable en  $x \in K_\lambda$  entonces

$$\varphi'_\lambda(x) \leq \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Para terminar nuestro estudio de la derivada  $\varphi'_\lambda$  vamos a demostrar:

i)  $\varphi_\lambda$  es derivable en casi toda parte y  $\varphi'_\lambda(x) = \frac{1}{1 - \lambda}$ .

Nos referimos, por supuesto, a "en casi toda parte" de  $K_\lambda$ .

La función  $\varphi_\lambda$  es monótona y continua. Un célebre resultado de Lebesgue, nos dice que  $\varphi_\lambda$  es derivable en casi toda parte (de  $[0,1]$ ). Ya sabemos que  $\varphi'_\lambda \equiv 0$  sobre  $[0,1] \setminus K_\lambda$ .

Como  $\varphi_\lambda$  es monótona creciente y continua existe una (única) medida de Borel  $\mu$  tal que

$$\mu([0, x]) = \varphi_\lambda(x).$$

Como  $\lambda < 1$  entonces  $\mu$  es absolutamente continua (respecto a la medida de Lebesgue) y por lo tanto:

$$\mu(E) = \int_E \varphi'_\lambda$$

para  $E$  conjunto medible.

Por lo tanto,  $\mu([0, 1] \setminus K_\lambda) = 0$ . Consideremos pues, solamente conjuntos medibles  $E \subseteq K_\lambda$ . Si  $m$  denota la medida de Lebesgue entonces

$$\mu(E) \leq \frac{m(E)}{1 - \lambda}$$

Demostremos la desigualdad contraria. Ello implicará que

$$\varphi'_\lambda(x) = \frac{1}{1 - \lambda} \text{ en casi toda parte de } K_\lambda.$$

Como  $\mu$  es una medida concentrada en  $K_\lambda$  entonces

$$1 = \mu(K_\lambda) = \mu(E) + \mu(K_\lambda \setminus E) \\ \leq \left( \int_E \varphi'_\lambda \right) + \frac{m(K_\lambda) - m(E)}{1 - \lambda}$$

por lo tanto

$$m(E) \leq (1 - \lambda) \int_E \varphi'_\lambda = (1 - \lambda) \mu(E)$$

lo cual termina la demostración.

**B I B L I O G R A F I A**

Para la preparación de este escrito nos hemos basado primordialmente en el material contenido en los trabajos:

1. DARST R. B. Some Cantor Sets and Functions  
Math. Magazine 1972.
2. HEWITT-STROMBERG. Real and Abstract Analysis  
Springer-Verlag 1975.

# SOLUCIONES APROXIMADAS DE LA ECUACION DE SCHRÖDINGER

M.Á. Pérez Angón

Depto. de Física, CINVESTAV-IPN

Apdo. Postal 14-740, 07000 México D.F

## 1. Principios Básicos de la Mecánica Cuántica

(i) Para un sistema físico dado, que sea microscópico pero no-relativista, existe una función (de onda) compleja  $\psi(x,y,z,t)$  a partir de la cual se puede determinar, en principio, toda la información necesaria para describir el estado físico de dicho sistema. La función de onda no tiene una interpretación física directa sino su magnitud al cuadrado  $|\psi(x,y,z,t)|^2$ , la cual se interpreta como la probabilidad de que el sistema se encuentre en la posición  $(x,y,z) \equiv (x_1,x_2,x_3)$  en el instante  $t$ . Para que esta interpretación sea consistente debemos tener

$$\int |\psi(x,y,z,t)|^2 d^3x = 1 \quad (1)$$

donde la integral es sobre todo el espacio.

(ii) Para satisfacer el principio de incertidumbre  $\Delta x_i \Delta p_i \geq \hbar/2$ , toda observable física debe estar representada por un operador lineal hermitico, por ejemplo:

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2)$$

(iii) La evolución temporal del sistema físico se obtiene exigiendo que la función de onda satisfaga una ecuación de eigenvalores para la energía total  $E$  del sistema:

$$(T + V(x, y, z)) \psi(x, y, z, t) = E \psi(x, y, z, t) \quad (3)$$

donde  $T = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$  es la energía cinética y  $V(x, y, z)$  es la energía potencial del sistema en cuestión. Si usamos las relaciones operacionales (2) y (3), se obtiene la ecuación de Schrödinger para dicho sistema

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right] \psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) \quad (4)$$

## 2. Métodos Utilizados para Resolver la Ecuación de Schrödinger.

La ecuación de Schrödinger (4) tiene soluciones exactas sólo para unos cuantos sistemas físicos muy sencillos: la partícula libre  $V = 0$ , el oscilador armónico  $V = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2)$ , y el

átomo de hidrógeno  $V = -e^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Para la mayoría de los sistemas físicos realistas la ecuación de Schrödinger no tiene solución exacta pero sí una aproximada obtenida con el método perturbativo. Este método se puede aplicar para potenciales que se pueden separar en dos contribuciones  $V = V_0 + \lambda V_1$ , donde  $V_0$  es soluble en forma exacta y  $\lambda V_1$  es, en cierto sentido, pequeño con respecto a  $V_0$ , esto es, que sea una pequeña perturbación de  $V_0$ . Las soluciones aproximadas para el potencial completo se generan como desarrollos perturbativos alrededor de la solución exacta para  $V_0$ :

$$(T + V_0) \psi_n = E_n^0 \psi_n$$

$$(T + V_0 + \lambda V_1) \psi_n = E_n \psi_n$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$E_n^{(1)} = \int \psi_n(\vec{x}) V_1(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) d^3x$$

$$\psi_n = \psi_n + \sum_{k \neq n} \frac{\lambda}{E_n^0 - E_k^0} \int \psi_k(\vec{x}) V_1(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) d^3x + \dots \quad (5)$$

Hasta hace poco tiempo, cuando no era posible aplicar el método perturbativo, se hacía necesario resolver la ecuación de Schrödinger en forma numérica. Sin embargo, recientemente se ha propuesto un nuevo método analítico para resolver dicha ecuación

en forma aproximada para ciertos potenciales a los que no se le podía aplicar el método perturbativo. Este método se conoce con el nombre de "desarrollo  $1/N$ ", donde  $N$  corresponde al número de dimensiones espaciales y que se toma como un parámetro variable. En el resto de la plática ilustraremos dicho método con un ejemplo sencillo.

### 3. El Desarrollo $1/N$ para la Ecuación de Schrödinger.

El método del desarrollo  $1/N$  en Mecánica Cuántica fué inspirado por el éxito de un método similar aplicado por Wilson y Fisher en el estudio de los fenómenos críticos, o transiciones de fase física estadística. Ante la carencia de un parámetro natural para hacer desarrollos perturbativos en problemas de fenómenos críticos Wilson y Fisher sugirieron que para poder generar dicho parámetro uno debería considerar el número de dimensiones espaciales como parámetro variable y no como un número fijo ( $=3$ ). Demostraron que el estudio de los fenómenos críticos es muy sencillo en  $4-\epsilon$  dimensiones espaciales y que el parámetro natural para realizar desarrollos perturbativos es  $\epsilon$ . Simultáneamente, para problemas en mecánica cuántica en los que el potencial carece de un parámetro natural (como  $\lambda$  en (5)) para aplicar el método perturbativo, se puede aplicar la misma filosofía de tratar el número de dimensiones espaciales  $N$  como un parámetro variable, y averiguar si en el 1

$N \rightarrow \infty$  el parámetro  $1/N$  resulta ser apropiado para hacer desarrollos perturbativos.

Para ilustrar el método en ésta plática, supondremos un sistema sujeto a un potencial esféricamente simétrico  $V = V(r)$  y consideraremos únicamente estados de momento angular cero. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en  $N$  dimensiones (tomaremos de aquí en adelante la convención  $\hbar = 1$ ) para una partícula de masa  $m$  sujeta a dicho potencial tiene la forma

$$\left[ -\frac{1}{2m} \nabla_N^2 + V_N(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (6)$$

donde

$$\nabla_N^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\nabla_N^2 f(r) = \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} \right] f(r) \quad (7)$$

con  $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$  y  $V_N(r)$  es la generalización del potencial  $V(r)$  a  $N$  dimensiones. Mediante la transformación  $\psi(r) = r^{-(N-1)/2} \phi(r)$ , la ecuación (6) se reduce a

$$\left[ -\frac{1}{2mN^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-1/N)(1-3/N)}{8mr^2} + \frac{V_N(r)}{N^2} \right] \phi(r) = \frac{E}{N^2} \phi(r). \quad (8)$$

Si el potencial  $V_N(r)$  es tal que

$$V_N(r) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N^2 v(r)$$

la ecuación (8) se reduce a

$$\left[ -\frac{1}{2mN^2} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{ef}}(r) + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) + \dots \right] \phi(r) = \frac{E}{N^2} \phi(r) \quad (9)$$

donde

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{8\mu r^2} + v(r) \quad (1)$$

Si además  $V_{\text{ef}}(r)$  tiene un mínimo en  $r = r_0$  como se ilustra la figura 1, entonces es posible simplificar aún más la ecuación de Schrödinger con las transformaciones  $\phi(x) = \exp(f(x))$ ,  $x = (r - r_0)$

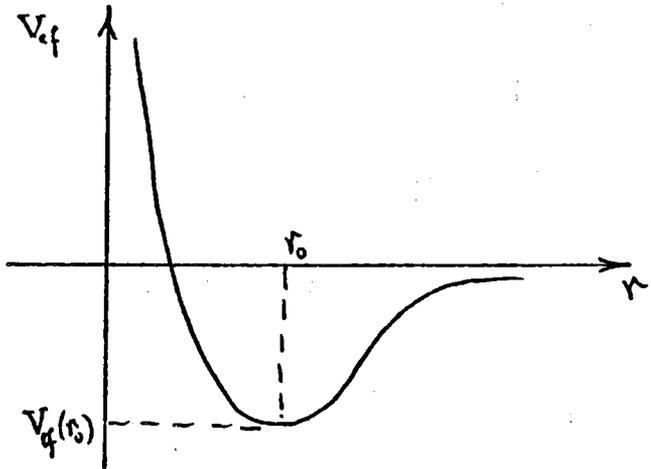


Fig. 1

$$-\frac{1}{2mr_0^2} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} + \left( \frac{df}{dx} \right)^2 \right] + N^2 V_{\text{Tot}}(x) = E \quad (11)$$

y ahora es fácil aplicar el método perturbativo a ésta ecuación, resolviendola orden por orden de acuerdo con los siguientes desarrollos en  $1/N$ :

$$V_{\text{Tot}}(x) = V_{\text{ef}}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x) \left( \frac{1}{N} \right)^m$$

$$E = E_{-2} N^2 + E_{-1} N + \sum_{m=0}^{\infty} E_m \left( \frac{1}{N} \right)^m \quad (12)$$

$$\frac{df}{dx} = g_{-1}(x) N + \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x) \left( \frac{1}{N} \right)^m .$$

Para finalizar la plática, citaremos los resultados obtenidos<sup>3</sup> con éste método para el potencial de Yukawa

$$V(r) = - \frac{ke^{-\alpha r}}{r} \quad (13)$$

el cual es el más sencillo de los potenciales de corto alcance y que tiene mucha utilidad en Física Nuclear. En particular, dicho potencial describe el estado ligado del deuterón con los siguientes valores para los parámetros  $k$  y  $\alpha$

$$k = 106.9 \text{ MeV} \cdot f \quad \text{y} \quad \alpha = 1.097 \text{ f}^{-1} \quad (14)$$

La generalización que se utilizó para el potencial en  $N$  dimensiones es

$$V_N(r) = -\frac{N^2}{9} \frac{k}{r} e^{-\frac{9\alpha r}{N^2}}$$

y el potencial efectivo es entonces

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{8\mu r^2} - \frac{k}{9r}$$

con mínimo en  $r_0 = 9/2mk$ .

En este caso se encuentra que las series del desarrollo 1 dadas en (12) convergen y el resultado para la energía tiene 1 expresión.

$$E = N^2 V_0 \left\{ \frac{1}{(1-1/N)^2} - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)(1 - e^{-\gamma/N^2}) - \frac{2\gamma}{N^3} \right\}$$

donde

$$V_0 \equiv V_{ef}(r_0) = -\frac{k}{18r_0}$$

$$\gamma = 9\alpha r_0 \equiv 9 \beta.$$

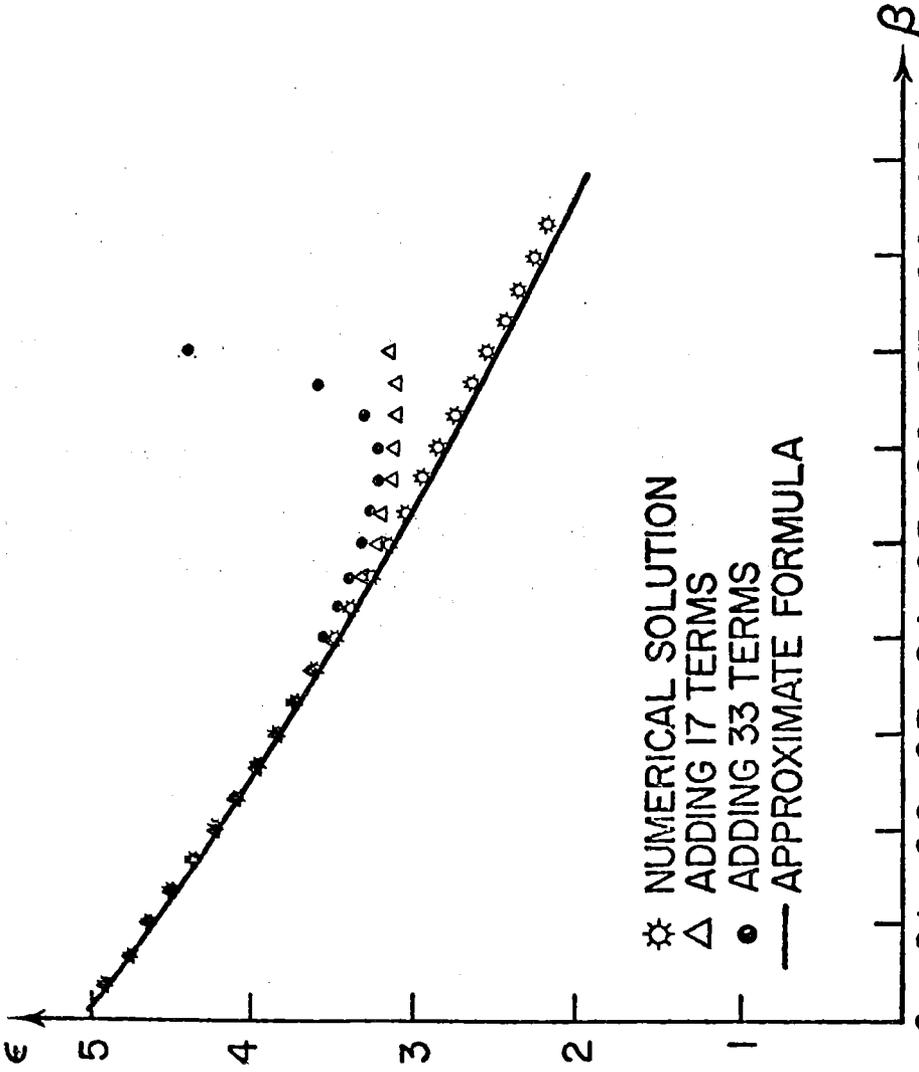
En la figura 2 se muestra el comportamiento de  $\epsilon = E/4V_0$  a varios términos de la serie perturbativa en  $1/N$  y el dado por expresión cerrada (17) con  $M = 3$ . Finalmente, es posible demostrar que (17) con  $N = 3$  y  $\gamma = 0$  se reduce al resultado bien conocido

la energía del estado base del átomo de hidrógeno

$$E = -\frac{1}{2} m k^2.$$

#### REFERENCIAS.

1. G. t Hooft, Nucl. Phys. B72, 461 (1974), Nucl. Phys. B75, 461 (1974).
2. K. Wilson and M. Fisher, Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972).
3. G. Moreno López, Tesis de Maestría, Depto. de Física, CIEA-IPN 1982; G. Moreno y A. Zepeda (por publicarse).



## SOBRE LA FUNCION ZETA DE RIEMANN

D. SUNDARARAMAN  
Depto. de Mat.  
CINVESTAV - IPN.

Les voy a hablar esta tarde acerca de una función que ocupa una posición muy privilegiada en el mundo de las Matemáticas. Es una función de apariencia bastante simple, que ha atraído a través de los años a las mentes de genios, maestros, especialistas y también amateurs de las Matemáticas. Esta situación prevalece y los expertos predicen que continuará en el futuro. Muchos libros y conferencias se han escrito sobre esta función. Todavía son más los libros en los que se le dedica al menos un capítulo; y sería una tarea formidable el enumerar los artículos publicados sobre ella. A pesar de estas intensas actividades, la función permanece misteriosa en ciertos aspectos !

Esta función tiene también la especial distinción de ser un tema, sobre el cual, desde amateurs hasta ganadores de la medalla Fields, encuentra placer y orgullo en hablar,

desde su propia perspectiva. La función zeta de Riemann, Damas y Caballeros, refleja de manera fidedigna el espíritu de las Matemáticas. Es de tal interés permanente que toda conferencia sobre ella ya tiene su público entusiasmado. Así, Damas y Caballeros, todos formamos parte de una gran tradición de nuestra rica cultura matemática.

Es posible hablar al infinito sobre la función zeta de Riemann.

Me voy a limitar, en esta plática, a discutir los valores de ella en los enteros, positivos y negativos; y no tanto estos valores exactos, sino su naturaleza aritmética. Sin embargo, sería un sacrilegio no mencionar al más famoso de todos los problemas no resueltos en Matemáticas. Así, empezaré por mencionar a la famosa hipótesis de Riemann.

I.1.: La función zeta de Riemann ; Escrita  $\zeta(s)$ ; definida

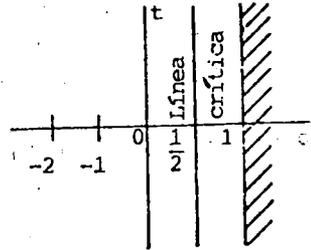
como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , donde  $s$  es un número complejo. Sea

$s = \sigma + \sqrt{-1} t$ . Se ve fácilmente que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  es convergen-

te para  $\sigma > 1$  :  $\sum_{M+1}^{M+N} \frac{1}{n^\sigma} < \int_M^{\infty} \frac{du}{u^\sigma}$  para  $\sigma > 1$ .

Por tanto, la serie para  $\zeta(s)$  es convergente uniforme y absolutamente en la región  $\sigma \geq 1 + \delta$  para toda  $\delta > 0$ . Por tanto,  $\zeta(s)$  es analítica (holomorfa) en la región  $\sigma > 1$ .

Esta función con su notación particular fué inventada por Riemann en 1859. Euler ya había estudiado esta función; pero solo como función de una variable real.



I.2: La ecuación funcional de Riemann para  $\zeta(s)$ :

Teorema. (a)  $\zeta(s)$  tiene continuación meromorfa en todo el plano  $s$ , con singularidad única en  $s = 1$ , que es un polo simple con residuo 1.

(b) Vale la siguiente ecuación funcional relacionando  $\zeta(s)$  con  $\zeta(1-s)$ :

$$(i) \quad \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

o equivalentemente

$$(ii) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma.

Observación 1: Recordemos que la función gama  $\Gamma$  (que generaliza a la función factorial) está dada por cualquiera de las siguientes definiciones equivalentes:

$$(i) \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad z \neq 0, -1, \dots, -n.$$

(fórmula del límite de Gauss)

$$(ii) \quad \Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

(fórmula canónica del producto de Euler, donde  $\gamma$

es la constante de Euler:  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$ ).

$$(iii) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dz \quad \text{si la (parte real de } z) > 0.$$

(fórmula integral de Euler)

$\Gamma(z)$  tiene las siguientes propiedades:

(iv)  $\Gamma(z)$  tiene solamente polos simples en  $z = 0, -1, -2, \dots$  con residuo en  $z = -n$  igual a  $(-1)^n/n!$

(v)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ; por tanto  $\Gamma(n+1) = n!$  si  $n$  es un entero positivo.

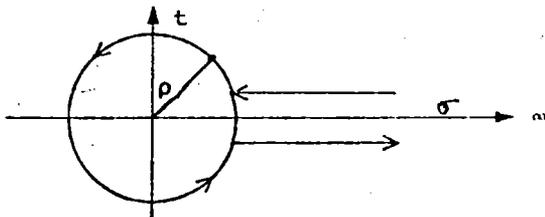
$$(vi) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$(vii) \quad 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad \text{(fórmula de duplicación de Legendre)}.$$

Observación 2: (i) La continuación meromorfa requerida de  $\zeta(s)$  que da la parte (a) del teorema está dada por

$$\zeta(s) = \frac{e^{-\pi i s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz, \text{ donde } C$$

es un contorno como en el dibujo



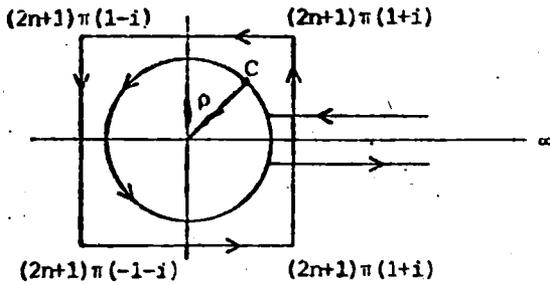
(ii)  $\zeta(s)$  se puede escribir como  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} +$  una función entera.

$$\text{Uno puede ver que } \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!} (s-1)^n,$$

donde  $|\gamma_n| < (n/2e)^n$ .

(iii) Para demostrar las ecuaciones funcionales, se toma

un contorno  $C_n$  como se muestra



Demostrar que  $\int_{C_n} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Sea  $C$  el contorno de (i). Entre  $C$  y  $C_n$ , el integrando tiene polos en  $\pm 2\pi i, \dots, \pm 2n\pi i$ . Aplique el teorema del residuo para obtener la ecuación funcional (b) (i).

(iii) La función  $\zeta(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$  es una función entera y satisface la ecuación funcional

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)$$

Para obtener la ecuación funcional (b) (ii) de (b) (i), use la fórmula de duplicación de Legendre (vii) de la observación 1.

1.3: El producto de Euler para  $\zeta(s)$ :

Teorema.  $\zeta(s) = \prod_p \left( \frac{1}{1-p^{-s}} \right)$  para  $\sigma > 1$ , donde  $p$  varía sobre el conjunto de todos los números primos  $2, 3, 5, \dots$

Demostración: El producto  $\prod_p \left( \frac{1}{1-p^{-s}} \right)$  es convergente para

$\sigma > 1$ , Como la serie  $\sum_p \left| \frac{1}{p^s} \right| = \sum_p \frac{1}{p^\sigma}$  es convergente para

$\sigma > 1$ . Al efectuar la multiplicación.

$$\prod_p \left( \frac{1}{1-p^{-s}} \right) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_p \left( 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right)$$

obtenemos la serie  $\sum_n \frac{1}{n^s}$ , Como cada entero positivo se puede

expresar como producto de primos de manera única,

$$\left| \zeta(s) - \prod_{p < N} (1-p^{-s})^{-1} \right| < \sum_{n > N} \frac{1}{n^\sigma} \quad \text{para todo entero positivo dado}$$

N.

Parte de la importancia de  $\zeta(s)$  se debe al simple pero importante hecho de que tiene un producto de Euler.

#### I.4 La hipótesis de Riemann para $\zeta(s)$ :

Considere  $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$  válida para  $\sigma > 1$ . Todo factor

$(1-p^{-s})^{-1}$  es distinto de cero en  $\sigma > 1$ . Por tanto,  $\zeta(s) \neq 0$

en  $\sigma > 1$ .

Considere la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi}{2} \right) \zeta(1-s).$$

Para  $c < 0$ ,  $\zeta(1-s) \neq 0$ , porque  $\zeta(s) \neq 0$  para  $\sigma > 1$ .

También  $\Gamma(1-s) \neq 0$  para  $\sigma < 0$ . Por tanto,  $\zeta(s) = 0$  solo en los ceros de  $\sin(\frac{s\pi}{2})$  en la región  $\sigma < 0$ . Así,  $\zeta(s) = 0$  en  $s = -2, -4, -6, \dots$ . Estos ceros de  $\zeta(s)$  en  $s = -2, -4, -6, \dots$  se llaman *ceros triviales* de  $\zeta(s)$ .

Considerando la función

$$(1-2^{1-s}) \zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots > 0, \quad 0 < \sigma < 1,$$

se puede demostrar que  $\zeta(s)$  no tiene ceros en  $0 < \sigma < 1$ .

Hay un teorema de Hadamard y de de la Vallée Poussin (de mane

ra independiente) que dice que no hay ceros en la línea  $\sigma = 1$

y por tanto, por la ecuación funcional, no hay ceros de  $\zeta(s)$

en la línea  $\sigma = 0$ . Esto implica que todos los ceros complejos

de  $\zeta(s)$  están en la faja crítica  $0 < \sigma < 1$ . La más famosa

conjetura de Riemann dice que todos los ceros complejos de

$\zeta(s)$  están en la línea crítica  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

**HIPOTESIS DE RIEMANN:** Todos los ceros complejos de  $\zeta(s)$  es-

tán en la línea  $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ .

A pesar de los mejores esfuerzos de excelentes ma-

temáticos, la hipótesis de Riemann continúa abierta. Mucho se avanzará en Teoría de Números si resulta que la hipótesis de Riemann es cierta.

II Los valores de  $\zeta(s)$  en los enteros positivos y negativos.

II.1:  $\zeta(s)$  tiene valores racionales en los enteros negativos (incluyendo a cero).

Vimos en I.4 que  $\zeta(s) = 0$  en  $s = -2, -4, -6, \dots$

Podemos encontrar todos los valores en los enteros negativos a partir de la representación integral (ver I.2 observación

2(i))

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Primero recordemos la definición de los números de Bernoulli.

Los números de Bernoulli  $B_n$  se definen por medio de la igualdad

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{1}{2}z + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m}, \text{ para } |z| < 2\pi.$$

Ponemos  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ . Los valores de  $B_{2m}$  son todos racionales. Los primeros valores son  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ ,

$$B_6 = 1/42, B_8 = -1/30, B_{10} = 5/66.$$

En nuestra notación, podemos tomar  $B_{2m+1} = 0$  para  $m \geq 1$ .

Por tanto, los números de Bernoulli  $B_m$  también se pueden de-

finir así:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m z^m}{m!} \quad \text{para } |z| < 2\pi.$$

Por tanto

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz =$$

$$\frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C z^{s-2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}z + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_4 \frac{z^4}{4!} + \dots \right\} dz$$

De aquí obtenemos  $\zeta(0) = -1/2$ ,  $\zeta(-2m) = 0$ ,

$$\zeta(1-2m) = \frac{\Gamma(2m) B_{2m}}{(2m)!} = -\frac{B_{2m}}{2m}$$

II.2 La fórmula de Euler para  $\zeta(2m)$ , donde  $m$  es un entero positivo.

Euler dió una fórmula elegante para  $\zeta(2m)$  en términos de los números de Bernoulli:

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} (2\pi)^{2m} B_{2m}}{2 \cdot (2m)!}$$

La demostración de Euler de ésta fórmula consiste

en expresar  $\pi z \cot \pi z$  de dos maneras distintas: una, al expresar esta función como serie de potencias de  $z^{2m}$  con coeficientes en términos de  $B_{2m}$ ; y la otra, obtener de la descomposición en fracciones parciales de  $\pi z \cot \pi z$  una expansión de series de potencias de  $z^{2m}$  con coeficientes en términos de  $\zeta(2m)$ . En efecto,

$$\pi z \cot \pi z = \pi iz \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \frac{2\pi iz}{e^{2\pi iz} - 1} + \pi iz$$

$$(A) \quad \pi z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}, \text{ válida}$$

para  $|z| < 1$ .

La descomposición en fracciones parciales da

$$\begin{aligned} \pi z \cot \pi z &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2 - z^2}, \text{ si } z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^m, \text{ si } |z| < 1 \end{aligned}$$

$$(B) \quad \pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m) z^{2m}, \text{ si } |z| < 1.$$

La fórmula de Euler se obtiene de igualar los coeficientes de  $z^{2m}$  en (A) y (B).

La fórmula de Euler también se puede derivar de la

ecuación funcional de  $\zeta(s)$ :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi}{2} \right) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos \left( \frac{s\pi}{2} \right) \zeta(s)$$

$$\zeta(1-2m) = 2^{1-2m} \pi^{-(1-2m)} \Gamma(2m) \cos(\pi m) \zeta(2m)$$

Usando el hecho de que  $\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}$  y  $\Gamma(2m) = (2m-1)!$

obtenemos la fórmula de Euler.

Hay muchas maneras de demostrar la fórmula de Euler sin usar Análisis Complejo; en particular, hay varias demostraciones elementales del hecho bien conocido de que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6.$$

Es bien sabido que  $\pi$  y sus potencias son irracionales. Por tanto, vemos de la fórmula de Euler que  $\zeta(2m)$  es irracional porque los números de Bernoulli son racionales.

Tal vez haya sido más difícil obtener una fórmula para  $\zeta(2m+1)$ ,  $m \geq 1$  en términos de los números de Bernoulli.

### II.3 La fórmula de Ramanujan para $\zeta(2N+1)$ .

En la página 259 del volumen 1 de los apuntes de Ramanujan encontramos su fórmula 15:

Si  $\alpha\beta = \pi^2$  y  $n$  es un entero,

$$\begin{aligned}
 & (4\alpha)^{1-n} \left\{ \frac{1}{2} S_{2n-1} + \frac{1}{1^{2n-1}(e^{2\alpha}-1)} + \frac{1}{2^{2n-1}(e^{4\alpha}-1)} + \dots \right\} \\
 & - (-4\beta)^{1-n} \left\{ \frac{1}{2} S_{2n-1} + \frac{1}{1^{2n-1}(e^{2\beta}-1)} + \frac{1}{2^{2n-1}(e^{4\beta}-1)} + \dots \right\} \\
 & = \frac{B_{2n}}{(2n)!} \{(-\alpha)^n + \beta^n\} \\
 & + \pi^2 \frac{B_2}{2!} \frac{B_{2n-2}}{(2n-2)!} \{(-\alpha)^{n-2} + \beta^{n-2}\} - \pi^4 \frac{B_4}{4!} \frac{B_{2n-4}}{(2n-4)!} \{(-\alpha)^{n-4} + \beta^{n-4}\} \\
 & + \text{los últimos términos.}
 \end{aligned}$$

Ramanujan no usaba la notación  $\zeta$  sino  $S$  para la función zeta.

Ramanujan no dió ninguna demostración de ésta fórmula, éste es

el caso para la mayoría de las fórmulas en sus apuntes. ! De-

ben ser ciertas! "Deben ser ciertas, porque si no lo fueran,

nadie podría haber tenido la imaginación de inventarlas". Es-

to dijo G.H. Hardy sobre otras famosas fórmulas de Ramanujan.

Yo creo que eso se aplica igualmente a las fórmulas de arriba.

Bueno, existen demostraciones de ella dadas por varios espe-

cialistas. Las fórmulas de arriba ha recibido mayor atención

solo en las últimas dos décadas.

Ciertamente, es más difícil que la fórmula de Euler,

como podemos ver. Todas las demostraciones existentes usan resultados de funciones modulares. No parece tenerse ninguna demostración elemental.

Reescribiendo la fórmula de Ramanujan, usando la representación  $\zeta$  para la función zeta y escribiendo  $N + 1$  en lugar de  $n$ , tenemos

II.3. (1) Teorema (Fórmula de Ramanujan para  $\zeta(2N+1)$ ).

Sean  $\alpha, \beta$  enteros positivos tales que  $\alpha\beta = n^2$ , y

$N$  un entero positivo. Entonces es válida la siguiente fórmula

la:

$$\begin{aligned} & \alpha^{-N} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2N+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^{-2N-1}}{e^{2\alpha k} - 1} \right) \right\} \\ & - (-\beta)^{-N} \left\{ \frac{1}{2} \zeta(2N+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^{-2N-1}}{e^{2\beta k} - 1} \right) \right\} \\ & = -2^{2N} \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2N+2-2k}}{(2N+2-2k)!} \alpha^{N+1-k} \beta^k. \end{aligned}$$

Observando de cerca ésta fórmula, vemos que  $\zeta(2N+1)$  está dado en términos de dos series convergentes doblemente infinitas que involucran números de Bernoulli y una suma finita de números de Bernoulli.

Tomemos  $\alpha = \beta = \pi$  sea  $N$  un entero positivo impar. Entonces la fórmula anterior se reduce a la siguiente:

$$\zeta(2N+1) = (2\pi)^{2N} \pi \sum_{k=0}^{N+1} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2N+2-2k}}{(2N+2-2k)!} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^{-2N-1}}{e^{2\pi k} - 1} \right).$$

En particular, tenemos

$$\zeta(3) = \pi^3 \left\{ 2 \sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{4-2k}}{(4-2k)!} - 2\pi^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^{-3}}{e^{2\pi k} - 1} \right) \right\}$$

Hay una antigua conjetura que dice que  $\zeta(2N+1)$  es irracional para todos los enteros positivos  $N$ . De la fórmula de Ramanujan para  $\zeta(3)$ , vemos que

$$\zeta(3) = \pi^3 \{ \gamma_3 - \pi^{-3} S \}, \text{ donde } S = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^{-3}}{e^{2\pi k} - 1} \right) \text{ y } \gamma_3 \text{ es}$$

racional.

No ha sido posible determinar la naturaleza aritmética

de  $\pi^{-3}$  y por ello no ha sido posible saber si

$\gamma_3 - \pi^{-3} S$  es racional o no. Problemas similares se originan

de  $\zeta(2N+1)$ .

Sin usar la fórmula anterior y valiéndose solamente

de métodos simples, R. Apéry demostró en 1978 que  $\zeta(3)$  es

irracional.

La demostración de Apéry no se generaliza sin embargo a

$\zeta(2N+1)$ ,  $N > 1$ .

CONJETURA  $\zeta(2N+1)$  es irracional, para todo entero

positivo mayor o igual a 2.

III EL TEOREMA DE APÉRY :  $\zeta(3)$  es irracional.

Recordemos que un número  $x$  es racional si y solo para todos los enteros  $p, q$ ,  $q > 0$  con  $x \neq \frac{p}{q}$ , existe un entero positivo  $q_0$  tal que  $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{qq_0}$ .

Un número  $y$  es irracional si y solo si existe una sucesión  $\{p_n/q_n\}$  de números racionales tal que  $p_n/q_n \neq y$ , y existe  $\delta > 0$  con  $|y - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$ , para  $n = 1, 2, \dots$

En general, es difícil demostrar que un número dado es irracional. Para demostrar que  $\zeta(3)$  es irracional, Apéry produjo una sucesión  $\{p_n/q_n\}$ ,  $p_n/q_n \neq \zeta(3)$  y  $\delta > 0$  tal que  $|\zeta(3) - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$ . La  $\delta$  de Apéry es  $\delta = \frac{\log \alpha - 3}{\log \alpha + 3}$ , con  $\alpha = (1 + \sqrt{2})^4$ . Encontramos que  $\delta = .080529\dots$ . La sucesión de Apéry  $\{p_n/q_n\}$  está dada por  $p_n = 2[1, 2, \dots, n]^3 a_n$ ,  $q_n = 2[1, 2, \dots, n]^3 b_n$ , donde  $[1, 2, \dots, n]$  es el mínimo común

múltiplo de  $1, 2, \dots, n$ ; y  $a_n, b_n$  satisfacen la relación de recurrencia

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34 n^3 - 51 n^2 + 27 n - 5) u_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

$a_0 = 0, a_1 = 6, b_0 = 1, b_1 = 5$ . Resulta que las  $a_n$  para  $n \geq 2$  son números racionales cuyos denominadores dividen a  $2[1, 2, \dots, n]^3$  y las  $b_n$ , para  $n \geq 2$ , son todos enteros. Se

demuestra que  $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 C_{nk}$ , donde

$$C_{nk} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} \quad \text{y las } b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

satisfacen la relación de recurrencia.

Usando la fórmula  $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$ ,

se ve que  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \zeta(3)$ , rápidamente.

Además, Apéry demostró que  $|\zeta(3) - p/q| > \frac{1}{q^{\theta+\varepsilon}}$ ,

$\theta = 13.41782\dots$  para todos los enteros  $p, q$  con  $q$  lo suficientemente grande comparado con  $\varepsilon$ . En otras palabras, el grado de irracionalidad de  $\zeta(3)$  es  $\theta = 13.41782\dots$

Apéry también demostró con su método que  $\zeta(2)$  es también irracional, que era bien sabido; el grado de irracio-

nalidad de  $\tau^2$  dado por el método de Apéry es 11.850782 ..., que es el mejor conocido. No es inmediatamente claro como Apéry obtuvo esta sucesión particular y esta  $\delta$  particular.

Inspirado por la demostración de Apéry, Beukers dió en 1979 una demostración mucho más sencilla de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ .

IV La demostración de Beukers de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ .

Lema. Sean  $m, n$  enteros no negativos tales que  $m \geq n$ . Entonces

$$(i) \quad A = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\frac{\log xy}{1-xy}) x^m y^n}{1-xy} dx dy$$

es un número racional cuyo denominador es un divisor de  $[1, 2, \dots, m]^3$ .

$$(ii) \quad \text{Si } m = n, \text{ entonces } A = 2 \left[ \zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \dots - \frac{1}{n^3} \right]$$

Observación: (a) La integral de arriba es impropia y se debe interpretar como  $\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon}$  y permitir  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$(b) \quad \text{si } m = n = 0, \quad A = 2 \zeta(3).$$

La demostración del lema es fácil.

Definimos los polinomios  $P_r(x)$  como

$$P_r(x) = \frac{1}{r!} \left\{ \frac{d}{dx} \right\}^r x^r (1-x)^r.$$

Se ve que  $P_r(x)$  tiene coeficientes enteros. Observemos que

estos polinomios se parecen a los polinomios de Legendre

$$L_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n (z^2 - 1)^n.$$

Del lema y de la definición de  $P_r(x)$  es claro que la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dx dy$$

que denotamos por  $B$ , debe ser de la forma  $[A_n + B_n \zeta(3)] [1, \dots, n]^{-3}$ ,

donde  $A_n, B_n$  son enteros.

Ahora bien,  $B$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1 - (1-xy)z} dx dy dz \quad \text{ya que } \frac{-\log xy}{1-xy} = \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{1 - (1-xy)z}. \end{aligned}$$

Integrando parcialmente con respecto a  $x$   $n$  veces, obtenemos

$$B = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n (1-x)^n P_n(y)}{(1 - (1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz$$

Substituyendo  $\omega = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ , tenemos que B se reduce a

$$B = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-\omega)^n P_n(y)}{1 - (1-xy)\omega} dx dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n x^n (1-y)^n y^n (1-\omega)^n \omega^n}{(1 - (1-xy)\omega)^{n+1}} dx dy dz$$

después de integrar parcialmente n veces con respecto a y.

Verificamos que el máximo de  $x(1-x) y(1-y) \omega(1-\omega)$

$(1-(1-xy)\omega)^{-1}$  ocurre cuando  $x = y$  y el valor máximo es  $\leq (\sqrt{2}-1)^4$ .

Por tanto,

$$B \leq (\sqrt{2}-1)^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy d\omega}{(1-(1-xy)\omega)} dx dy dz$$

$$= (\sqrt{2}-1)^4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)^4 \zeta(3) \text{ por (ii) del lema y la observa-}$$

ción (b).

Así,  $B \leq 2(\sqrt{2}-1)^4 \zeta(3)$ .

Obviamente, la integral B no es cero. Por tanto, obtenemos

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| [1, 2, \dots, n]^{-3} < 2 \zeta(3) (\sqrt{2}-1)^{4n}$$

$$0 < |F_n + B_n \zeta(3)| < 2 \zeta(3) [1, 2, \dots, n]^3 (\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Se sabe que  $[1, 2, \dots, n] < e^n < 3^n$  para  $n$  lo suficientemente grande. Por tanto

$$0 < |A_n + B_n \zeta(3)| < 2 \zeta(3) 27^n (\sqrt{2}-1)^{4n} < \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

La irracionalidad de  $\zeta(3)$  es consecuencia clara de esto.

Beukers también demostró que su método, como el de Apéry, se aplica a  $\zeta(2)$ . Sin embargo, el método de Beukers, también como el de Apéry, no se puede generalizar. De esta manera, la conjetura de que  $\zeta(2N + 1)$  es irracional para  $N > 1$ , permanece abierta.

#### V EL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

La motivación de Riemann para estudiar  $\zeta(s)$  fué el estudio de la distribución de los números primos, usando a  $\zeta(s)$  entre otras cosas. El artículo en el que apareció por primera vez  $\zeta(s)$  de Riemann se tituló: "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (sobre el número de primos menores que una magnitud dada).

En este profundo trabajo, Riemann conjeturó la Hipótesis de Riemann y el Teorema de los Números Primos.

En 1896, Hadamard y de la Vallée Poussin demostraron de manera independiente el Teorema de los Números Primos. Este último dice,

*Teorema de Los Números Primos.* Sea  $\pi(x)$  el número de números primos no mayores que  $x$ . Entonces  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ , donde el símbolo  $\sim$  quiere decir que  $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Hadamard y de la Vallée Poussin demostraron primero que no hay ceros de  $\zeta(s)$  en la línea  $\operatorname{Re}(s) = 1$ , y entonces, usando esta propiedad de  $\zeta(s)$ , es decir, que  $\zeta(1 + it) \neq 0$  para  $t \neq 0$ , obtuvieron el Teorema de los Números Primos. Selberg dió en 1949 una demostración elemental de este resultado (sin usar análisis complejo).

Nosotros damos una demostración, siguiendo a Ingham, del Teorema (Hadamard y de la Vallée Poussin): Para  $t \neq 0$ ,  $\zeta(1 + it) \neq 0$ .

*Demostración:* Hacemos uso de las siguientes fórmulas de Ramanujan, publicadas en 1915:

Si  $s, s-a, s-b, s-a-b$  todos tienen partes reales mayores que uno, entonces

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

donde  $\sigma_a(n)$  = suma de las  $a$  potencias de los divisores positivos de  $n$ .

En particular, si  $\text{Re}(s) > 1$ , tenemos que

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s}, \text{ donde } d(n) \text{ es el número de divisores positivos de } n.$$

Supongamos que  $\zeta(1+ic) = 0$  para  $c$  positivo.

Tomemos  $a = \sqrt{-1}c$ ,  $b = \sqrt{-1}c$  en la fórmula de Ramanujan de arriba.

Entonces

$$f(s) = \sum \frac{|\sigma_{ic}(n)|^2}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)\zeta(s-ic)\zeta(s+ic)}{\zeta(2s)}$$

Se puede demostrar que la serie es convergente para

$$\text{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } \delta > 0, f\left(\frac{1}{2} + \delta\right) = \sum \frac{|\sigma_{ic}(n)|^2}{n^{\frac{1}{2} + \delta}} > 1.$$

Pero  $\zeta(2s) = O(1 + 2\delta) \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  y  $\zeta^2(s)$ ,

$\zeta(s-ic)$ ,  $\zeta(s+ic)$  son todos acotados. Por tanto,  $f(\frac{1}{2} + \delta) \rightarrow 0$ .

Esta contradicción demuestra que  $\zeta(1+ic) \neq 0$ .

VI Antes que Riemann, Dirichlet estudió funciones parecidas a

$\zeta$ . Las series de Dirichlet y las funciones L de Dirichlet han

sido estudiadas activamente. También hay funciones L de

Hecke, Artin y Weil; y hay funciones L p-ádicas. Estas son

funciones  $\zeta$  de formas cuadráticas y de álgebras simples.

También hay funciones  $\zeta$  y L de congruencia asociadas a va

riedades algebraicas sobre campos finitos, etc.

No es una exageración el afirmar que en aspectos importantes,

el estudio de estas funciones (que cubre muchas ramas de las

Matemáticas) está motivado por la aparente inocente función

zeta de Riemann.

Se dice por ahí que el clan de los matemáticos tie-

ne éxito através de la eterna creación de problemas ..., la ma

yor parte del tiempo tratando de resolverlos; ¡y ocasionalmente

resolviendo algunos de ellos!

¡Ojalá que nuestro clan tenga buen éxito!

## BIBLIOGRAFIA

- 1) TITCHMARSH, E.C.      The theory of the Riemann Zeta-function.  
Oxford University Press, 1951.
- 2) KATAYAMA, KOJI      On Ramanujan's formula for values of Riemann Zeta function at positive odd integers.  
Acta Arithmetica, XXII, (1972), 149-155.
- 3) GROSSWALD, EMIL      Comments on some formulas of Ramanujan  
Acta Arithmetica XXI, (1972), 25-34.
- 4) VAN DER POORTEN, ALFRED      A proof that Euler missed ....  
Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$   
Math. INT, 1 (1978), No. 4, 195-203.
- 5) BEUKERS, F.      A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ ; Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 268-272.

NOTE BOOKS OF SRINIVASA RAMANUJAN  
Volume I

Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957

$$+ \frac{\beta \sin 2n\beta}{e^{2\beta}-1} + \frac{\beta \sin 4n\beta}{e^{4\beta}-1} + \frac{\beta \sin 6n\beta}{e^{6\beta}-1} + \dots$$

$$= \frac{\alpha \coth n\alpha - \beta \cot n\beta}{4}$$

14. If  $\alpha, \beta = \pi^2$  and  $n$  is a positive integer  $> 1$

$$\alpha^n \left\{ \frac{B_{2n}}{4n} \cos \pi n + \frac{1^{2n-1}}{e^{2\alpha}-1} + \frac{2^{2n-1}}{e^{4\alpha}-1} + \frac{3^{2n-1}}{e^{6\alpha}-1} + \dots \right\}$$

$$= (-\beta)^n \left\{ \frac{B_{2n}}{4n} \cos \pi n + \frac{1^{2n-1}}{e^{2\beta}-1} + \frac{2^{2n-1}}{e^{4\beta}-1} + \frac{3^{2n-1}}{e^{6\beta}-1} + \dots \right\}$$

or 1.  $\frac{15}{e^{2\pi}-1} + \frac{2^5}{e^{4\pi}-1} + \frac{3^5}{e^{6\pi}-1} + \frac{4^5}{e^{8\pi}-1} + \dots = \frac{1}{504}$

2.  $\frac{19}{e^{2\pi}-1} + \frac{2^9}{e^{4\pi}-1} + \frac{3^9}{e^{6\pi}-1} + \frac{4^9}{e^{8\pi}-1} + \dots = \frac{1}{264}$

3.  $\frac{1^{12}}{e^{2\pi}-1} + \frac{2^{12}}{e^{4\pi}-1} + \frac{3^{12}}{e^{6\pi}-1} + \frac{4^{12}}{e^{8\pi}-1} + \dots = \frac{1}{24}$

15. If  $\alpha, \beta = \pi^2$  and  $n$  any integer

$$(\alpha)^{1-n} \left\{ \frac{1}{2} S_{2n-1} + \frac{1}{1^{2n-1}(e^{2\alpha}-1)} + \frac{1}{2^{2n-1}(e^{4\alpha}-1)} + \dots \right\}$$

$$- (-\beta)^{1-n} \left\{ \frac{1}{2} S_{2n-1} + \frac{1}{1^{2n-1}(e^{2\beta}-1)} + \frac{1}{2^{2n-1}(e^{4\beta}-1)} + \dots \right\}$$

$$= \frac{B_{2n}}{2n} \{(-\alpha)^n + \beta^n\} + \pi^2 \frac{B_2}{2} \frac{B_{2n-2}}{2n-2} \{(-\alpha)^{n-2} + \beta^{n-2}\}$$

$$- \pi^4 \frac{B_4}{4} \frac{B_{2n-4}}{2n-4} \{(-\alpha)^{n-4} + \beta^{n-4}\} + \dots \text{the last term}$$

being  $-\pi^n \frac{B_n}{2n} \frac{B_n}{2n} (-1)^{\frac{n}{2}}$  or  $\pi^{n-1} \frac{B_{n-1}}{n-1} \frac{B_{n+1}}{n+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{(-\alpha)^1 + \beta^1\}$

according as  $n$  is even or odd.

LEONHARDE EULERI  
OPERA OMNIA  
SERIES PALMA XIV

132-133]

DE SUMMIS SERIERUM RECIPROCARUM

85

et summa quadratorum eorundem terminorum =  $Q$ , summa cuborum =  $R$ ,  
summa biquadratorum =  $S$  etc. erit per § 8

$$P' = a = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6},$$

$$Q = Pa - 2\beta = \frac{1}{90},$$

$$R = Qa - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{945},$$

$$S = Ra - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450},$$

$$T = Sa - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\epsilon = \frac{1}{93555},$$

$$V = Ta - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\epsilon - 6\zeta = \frac{691}{6825 \cdot 93555}$$

etc.

18. Ex his ergo derivantur summae sequentes<sup>1)</sup>

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{p^2}{6} = P',$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{p^4}{90} = Q',$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{p^6}{945} = R',$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{p^8}{9450} = S',$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T',$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{691p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V'$$

etc.,

quae series ex data lege attamen multo labore ad altiores potestates produci  
possunt. Dividendis autem singulis seriebus per praecedentes orientur se-  
quentes aequationes

1) In editione principe ab EULERO ad has summas designandas eadem quae supra litterae  
 $P, Q, R, \dots$  usurpatae sunt. C. B.



## LOS INFINITESIMOS HOY

Por Carlos Imaz\*

El término "hoy" del título se refiere a las dos últimas décadas y, como después veremos, a sólo un aspecto del desarrollo de los infinitésimos. La historia anterior a esta época puede consultarse en el excelente libro de Edwards [5].

Algo hay en la nomenclatura matemática que nunca he podido explicar me ¿cómo es posible que los números llamados reales contengan a los -- llamados irracionales? Seguramente estamos aceptando la irracionalidad como parte de la realidad. O bien, ¿cómo es posible que los llamados complejos contengan a los imaginarios? Seguramente estamos aceptando que todo lo imaginado gana corporeidad a través de la complicación.

A final de cuentas, estas son paradojas aparentes; ya que real y razón, o complejo e imaginario no son entidades filosóficas necesariamente interconectadas, ni contrapuestas.

Pero la situación es muy distinta en relación al par infinito e infinitésimo, entidades necesariamente interconectadas y contrapuestas. - Con respecto a ellas, en el curso de la historia, los matemáticos han tenido alternativamente (e incluso simultáneamente) desde posiciones de franco y abierto rechazo hasta relaciones íntimas, pero clandestinas y vergonzantes.

Debido principalmente al trabajo de Cantor [3], esta situación cambia radicalmente en el siglo XIX cuando el infinito es legitimizado, pero el infinitésimo es ilegitimizado, y esto si resulta paradójico. Lo insólito de la situación parece reflejarse incluso en la actitud de Cantor quien, así como arropa con gran "amor" al infinito, despliega una -

---

(\*) Sección Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

saña vehemencial para enterrar los infinitésimos, llegando incluso a satanizar a quienes, como Veronese [19], se atreven a intentar darle carta de ciudadanía matemática a esos minúsculos seres. La actitud de Cantor estaba, aparentemente, basada en su fe sobre la validez universal e indiscriminada del principio arquimediano, cayendo con ello en el mismo tipo de "error" en que cayeron muchos matemáticos que querían validar universalmente el quinto postulado de Euclides.

Por fortuna, aun cuando solo en forma esporádica, se continuó con los intentos de formalizar los infinitésimos. Así, Bois-Reymond [2] construye una elaborada teoría de órdenes de magnitud para el comportamiento asintótico de funciones; Stolz [16] trata de construir una teoría aritmética para esos órdenes de magnitud, pero su trabajo resulta inaplicable en la práctica; Schmieden y Laugwitz [14] construyen un sistema generalizado de números, un anillo parcialmente ordenado con divisores de cero, que contiene infinitos e infinitésimos.

Finalmente, Robinson [12], demuestra la existencia de campos, totalmente ordenados, que contienen una copia de los reales y contienen infinitos e infinitésimos. La demostración de Robinson se basa en la no categoricidad del sistema de los reales, en vista de lo cual existen extensiones propias de los reales que poseen todas las propiedades de éstos que pueden formularse en cierto cálculo proposicional y en términos de ciertas relaciones como adición, producto e igualdad. Este tipo de situación había sido ya estudiada por Skolem [15] para el sistema de los números naturales. La idea es utilizar lo que los lógicos llaman el principio de finitud o teorema de compacidad [13, pág. 13], que asienta que si  $K$  es un conjunto (infinito) de proposiciones, tal que todo subconjunto finito de  $K$  es consistente (tiene un modelo), entonces  $K$  es consistente. Entonces, si por  $K$  tomamos las proposiciones (en cierto cálculo) verdaderas en los reales y las proposiciones  $\exists x > 1$ ,  $\exists x > 2$ ,  $\exists x > 3$ , ..., cada subconjunto finito de  $K$  es consistente (su modelo son los reales  $R$ ) luego  $K$  es consistente y -

cualquiera de sus modelos  $*R$  es el campo buscado.

En forma algebraica es fácil demostrar la existencia de estos campos  $*R$ . En efecto, consideremos el conjunto  $R^N$  de todas las sucesiones  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de números reales. Con la suma y producto por componentes  $R^N$  es un anillo. Si consideramos el subconjunto  $A \subset R^N$  de las sucesiones nulas salvo en un número finito de entradas, entonces  $A$  es un ideal. Sea  $B \supset A$  un ideal maximal, entonces  $R^N/B$  es un campo y es uno de tales  $*R$ . Lo difícil, claro está, es demostrar que  $R^N/B$  mantiene las proposiciones válidas en los reales. En esencia, esta es la construcción que aparece en [11] y [7].

En base a los campos  $*R$  Robinson, en su libro [13], construye el análisis real con infinitésimos y demuestra que es equivalente al construido sobre la base de una teoría  $\epsilon, \delta$  de límites. Incluso hace aplicaciones interesantes como, por ejemplo una demostración del principio de Saint-Venant. Hasta aquí se puede considerar que se ha cerrado un ciclo y los infinitésimos han quedado incluidos en la matemática en el mismo rango que lo están los irracionales o los complejos. Incluso  $*R$  (aun cuando no completo) es arquimediano si, por principio de Arquímedes entendemos la proposición "dados  $a, b \in *R$  con  $0 < a < b$ , entonces existe un entero  $n$  tal que  $b < na$ ", ya que tal proposición, válida en  $R$ , lo será necesariamente en  $*R$ , pero en general  $n$  será un entero infinito.

En una conferencia dictada en marzo de 1973, Kurt Gödel decía: --- "... hay buenas razones para creer que el análisis no-estándar (el basado en  $*R$ ), en una versión u otra, será el análisis del futuro". [13, pág. X]. Sea como fuere, una cosa es actualmente cierta. Por un lado se ha ido desarrollando con relativo éxito, una escuela de investigación en temas de análisis vía  $*R$ , por ejemplo, en el estudio de operadores compactos, análisis complejo, ecuaciones diferenciales, distribuciones, etc. Por otro lado, el modelo  $*R$  empieza a introducirse en

la enseñanza por medio de diversos textos, de los cuales los más difundidos han sido el de Keisler [9] y el de Henle y Kleinberg [7]. En lo que sigue me referiré solo a este último aspecto de la evolución de \*R.

Hay dos razones fundamentales que hacen parecer deseable introducir el cálculo diferencial e integral vía un modelo infinitesimal. En primer lugar, "... podemos disfrutar toda su simplicidad y poder intuitivo, sin salirnos de una atmósfera matemáticamente precisa y rigurosa" - [7, p. VIII]. En segundo, un sentimiento de placer y alivio por parte de los matemáticos aplicados, físicos, ingenieros, etc., al poder utilizar los infinitésimos de manera abierta, sin temor a la crítica o sin necesidad de oscurecedores circunloquios, véase, por ejemplo, Komkov [10].

En lo particular concuerdo con éstas y otras razones para preferir un modelo infinitesimal de los reales, pero veamos que ha pasado hasta ahora. Debe haber quedado claro que \*R es un objeto "constructible" - solamente desde el punto de vista existencial. Matemáticamente, salvo para los intuicionistas o los constructivistas, esto no es nada objetable. ¿Pero, qué sucede si queremos enseñar a nivel elemental el cálculo en base a \*R? Algunas posibilidades están muy claramente materializadas en los textos de Henle-Kleinberg y Keisler.

En el primero de estos textos los autores se dan a la tarea de construir un \*R (hiperreales los llaman), haciendo una serie de manipulaciones alegres de conceptos de lógica matemática y utilizando, sin mencionarlo, el principio del buen orden. A lo que llegan es a la conclusión de que un hiperreal es una clase de equivalencia de sucesiones reales, pero se desconoce el criterio de equivalencia (de hecho no puede llegarse a más), esto es, dadas dos sucesiones  $r_1, r_2, r_3, \dots$  y  $p_1, p_2, p_3, \dots$  no podemos, en general, decir si representan el mismo o diferentes hiperreales. En conjunto es una presentación que parece demasiado complicada y sutil como para usarse con un principiante del cálculo.

En el segundo de los textos, el de Keisler, se abandona toda pretensión de una construcción y se adopta en pleno el método axiomático. Algunos de los "axiomas" de Keisler son:

Axioma:

\*R es un campo ordenado extensión propia de los reales R.

Axioma:

Para cada función real  $f$ , de  $n$  variables reales, existe una función hiperreal  $*f$  de  $n$  variables hiperreales, llamada su extensión natural (?). Las operaciones de campo en \*R son las extensiones naturales de las operaciones de campo en R.

Axioma:

Si dos sistemas de fórmulas tienen exactamente las mismas soluciones reales, entonces tienen exactamente las mismas soluciones hiperreales.

Axioma:

En \*R existe un elemento infinitesimal positivo.

En base a este tipo de axiomas y usando el más ortodoxo método deductivo, Keisler construye el cálculo. En la crítica que Bishop [1] hace del texto de Keisler dice: "A veces les digo a los matemáticos cuyo único interés es deducir teoremas de axiomas que añadan el axioma ' $0 = 1$ '. Ellos se enojan, pues éste sería inconsistente. Lo que realmente les preocupa es que la matemática se trivializaría, y se quedarían sin chamba." La crítica de Bishop fue contrarrestada con el "argumento" de que Bishop es un constructivista. "Es como utilizar un abstemio para catar vino", señalaba Keisler, véase [4]. Lo cierto es que la crítica de Bishop no está apoyada en el constructivismo, sino en el análisis de las posibilidades de éxito instruccional con semejante presentación del cálculo diferencial e integral, por lo tanto, refutar esa crítica requeriría de otros argumentos que, aparentemente, no se tienen.

De hecho, lo que ha sucedido es que se han presentado posteriormente varias alternativas para introducir el modelo infinitesimal a la educación, sin haberse concretado en textos. Algunas de esas alternativas tratan de simplificar la versión de Keisler, [18]; darle la vuelta a la construcción de Henle-Kleinberg, [6]; o bien construir modelos instruccionales que no utilicen la estructura  $\ast R$  de Robinson, [17] y [8].

La versión de Tall [18] utiliza el criterio de no minimizar el conjunto de axiomas para definir  $\ast R$ , en relación con los axiomas que usa Keisler [9]. En términos generales el resultado de tal táctica no parece mejorar en nada las cosas. La versión de Hatcher [6] utiliza la construcción algebraica de  $\ast R$  que hemos esbozado antes. Este autor se basa en la afirmación de que los conocimientos de ciertos resultados algebraicos necesarios pueden ser alcanzados por estudiantes de nivel medio superior o universitario elemental. Entre estos conocimientos se incluyen los siguientes:

1. Un ideal maximal es primo.
2. Todo ideal propio está contenido en un ideal maximal.
3. Todo campo es un dominio entero.
4. Un anillo cociente es campo si, y solamente si, el ideal divisor es maximal.

y claro está, todo lo que implican como antecedentes tales conocimientos.

Entre las opciones que no utilizan las estructuras  $\ast R$  de Robinson, se encuentra la de Tall [17]. En realidad el autor solo presenta un esbozo basado en el campo  $R(\epsilon)$  de las series de potencias de la forma

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \epsilon^n \quad \left( \epsilon \equiv \lim_{x \rightarrow 0} x \right),$$

donde  $k$  es un entero (positivo, negativo o cero). Aquí, la parte de la serie en la que  $n < 0$ , representa lo infinito; la parte  $n = 0$ , lo real; y la parte  $n > 0$ , lo infinitesimal. No creemos necesarios más comentarios ya que la versión [18] es posterior a ésta, y no hay mejor crítica que la autocrítica.

A diferencia de las alternativas anteriores, la versión de Imaz - González - Salcido [8] no pretende utilizar un  $*R$  de Robinson sino una estructura más simple y constructible, en el mismo sentido, por ejemplo, que los complejos son constructibles en base a los reales. La estructura, denotada por  $R^*$ , tiene por elementos todas las expresiones de la forma

$$r + a\omega^{-\alpha} \quad \text{y} \quad a\omega^{\alpha}$$

donde  $r, a, \alpha$  son reales,  $\alpha \geq 0$ ,  $\omega$  es un símbolo (si se quiere, puede pensarse  $\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} x$ ),  $0\omega^{\pm\alpha} \equiv 0$ ,  $a\omega^0 \equiv a$ . La idea es que los elementos de la forma  $a\omega^{\alpha}$  juegan el papel de infinitos, los de la forma  $r + a\omega^{-\alpha}$  son los números finitos y si mantenemos el real  $r$  fijo forman el "átomo" de  $r$ . En particular, el átomo del cero serán los infinitesimales  $a\omega^{-\alpha}$ . Los números infinitos se ordenan según su exponente, a exponentes iguales, según su coeficiente. Los números finitos se ordenan según sus partes reales. Los infinitésimos se ordenan con el mismo criterio que los infinitos y el orden entre infinitésimos se traslada a cada átomo de un real. El aspecto de esta super recta totalmente ordenada sería algo como:  $(a, b, r > 0)$

$$\dots < -b\omega^{-\alpha} < \dots < -r - b\omega^{-\alpha} < \dots < -a\omega^{-\alpha} < 0 < a\omega^{-\alpha} < \dots < r + b\omega^{-\alpha} < \dots < a\omega^{\alpha} < \dots$$

La suma y multiplicación entre elementos de  $R^*$  se realiza como si fueran polinomios en  $\omega$ , pero para el resultado final se conserva sólo un término que contenga una "potencia" de  $\omega$ , la mayor. Es claro que los inversos multiplicativos de los infinitos son los infinitésimos

(y viceversa). Pero para números finitos  $r + a\omega^{-\alpha}$  se define su "inverso" como  $r^{-1} - ar^{-2}\omega^{-\alpha}$ . Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  se define su extensión canónica  $A^* \subset \mathbb{R}^*$ . Dada una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  se quiere considerar una extensión natural  $f^*: A^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ , estas extensiones naturales se definen para las funciones algebraicas y las trascendentes  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\ln$ ,  $\text{exp}$ .

Las definiciones de los conceptos usuales del cálculo que se hacen en [8] son similares a las condiciones de Robinson [13]. Así, por ejemplo,  $f$  es continua en un punto  $x \in A$  si, y solo si, la extensión  $f^*$  cumple con la condición

$$f^*(x + i) - f(x) = \text{infinitesimal},$$

para todo infinitesimal  $i$ , tal que  $x + i \in A^*$ .

La función  $f$  es derivable en  $x \in A$  si, y solo si,

$$\frac{f^*(x + i) - f(x)}{i}$$

pertenece al átomo de un mismo real  $p$ , para todo infinitesimal  $i$ , tal que  $x + i \in A^*$ . El real  $p$  es la derivada de  $f$  en  $x$ , etc.

Finalmente, se demuestra en [8] que, para cierta clase de funciones reales que incluye a las algebraicas y trascendentes, todos los conceptos son equivalentes a sus contrapartes de la teoría  $\epsilon, \delta$ . Como, -- por otra parte, Robinson [13] demuestra la equivalencia de sus conceptos con los de la teoría  $\epsilon, \delta$ , entonces los de [8] son equivalentes a los de Robinson. De esta manera se tiene un modelo constructible para el cálculo infinitesimal. Si este modelo resuelve de manera satisfactoria el problema de enseñanza está por verse.

Para terminar, conviene señalar que para Robinson [13, pág. 282] su

teoría no-estándar puede verse simplemente como un nuevo proceso deductivo para el análisis ordinario, más que un modelo con nuevas entidades matemáticas. De hecho, para él, términos como continuidad, derivada, etc., tienen siempre el significado de la teoría de límites. Así, como ejemplo, él demuestra que la propiedad de que  $f(x+i) - f(x) = \text{infinitesimal}$ , para todo infinitesimal  $i$  y un real fijo  $x$  es equivalente a la continuidad  $\epsilon, \delta$  usual.

Esto es, Robinson nunca piensa en la propiedad " $f(x+i) - f(x) = \text{infinitesimal}$ " como definitoria de un tipo nuevo de continuidad, digamos una " $\ast$ continuidad", que después resulta equivalente a la continuidad  $\epsilon, \delta$ . En los textos [7] y [9], la posición es en general ambigua, esto es, a veces la definición se da en el contexto de  $\ast R$  y en otras se da en el contexto  $R$  y se deduce su traducción a  $\ast R$ .

En [8] la posición, quizá un tanto implícita, es que todas las definiciones se dan en el contexto de  $R$  sin referencia a las definiciones usuales en  $R$  de acuerdo a la teoría de límites.

Esta última posición obligaría, sobre todo en lo que concierne a las aplicaciones, a cambiar también la imagen de los objetos físicos en forma acorde al modelo  $R$ . Todo parece indicar que esa posición puede sostenerse con coherencia, pero también estaría por verse qué ventajas puede reportar, por ejemplo en ingeniería, física, etc.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bishop, E., "Crítica de [9]", Bull. Amer. Math. Soc., 83, 205-208, 1977.
- [2] Bois-Reymond, P. du, "Über asymptotische Werte, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen". Math. Annalen 8, 363-414, 1875.
- [3] Cantor, G, "Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers", Dover, 1955.
- [4] Davis, M., Hausner, M., "The joy of infinitesimals: Keisler's Elementary Calculus", The Mathematical Intelligencer 1, 168-170, --- 1978.
- [5] Edwards, C.R., "The historical development of the Calculus", Springer, 1979.
- [6] Hatcher, W., "Calculus is algebra", Amer. Math. Month. 89, 362-370, 1982.
- [7] Henle, J.M., y Kleinberg, E.M., "Infinitesimal Calculus", MIT Press 1979.
- [8] Imaz, C., González, J., Salcido, A., "Un modelo infinitesimal del cálculo para enseñanza", en proceso de publicación, México, 1983.
- [9] Keisler, J., "Elementary Calculus", Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.
- [10] Komkov, V., "Letter to the editor", Not. Amer. Math. Soc., 24, ---- 269-271, 1977.

- [11] Luxemburg, W.A.J., "Lectures on A. Robinson's theory of infinite  
simals and infinitely large numbers", Cal. Tech., Pasadena, Calif.,  
1966.
- [12] Robinson, A., "Non-standard Analysis", Pro. Royal. Ac. Sc., Amster  
dam, Ser. A, 64, 432-440, 1961.
- [13] Robinson, A., "Non-standard Analysis", North Holland, Amsterdam, -  
1966.
- [14] Schmieden, C. y Laugwitz, D., "Eine Erweiterung der Infinitesimal  
rechnung", Math. Zeits., 69, 1-39, 1958.
- [15] Skolem, T., "Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe  
mittels endlich oder unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich  
Zahlenvariablen", Fun. Mat., 23, 150-161, 1934.
- [16] Stolz, O., "Vorlesungen über allegemeine Arithmetik", Leipzig, ---  
1885.
- [17] Tall, D., "The calculus of Leibniz: An alternative modern approach",  
The Mathematical Intelligencer, 2, 54-55, 1979.
- [18] Tall, D., "Elementary axioms and pictures from infinitesimal calcu  
lus", The Institute for Mathematics and its applications, Vol. 8,  
Essex, 1982.
- [19] Veronese, G., "Fondamenti di Geometria", Padua, 1891.



## "CONSIDERACIONES EN TORNO A LOS PRIMEROS TRABAJOS DE GEORG CANTOR"

Andrés Sestier

Los trabajos iniciales de Cantor ya los he transcrito en algunas publicaciones y lo que ahora voy a hacer es situar esa aportación de Cantor en el desarrollo histórico del análisis de variable real e inevitablemente tengo que hablar del concepto de función.

El concepto de función, en abstracto, como una correspondencia unívoca entre conjuntos, que se desprende de los trabajos de Cantor y Dedekind es en sí un concepto inútil. Hilbert decía que un concepto nuevo es como un injerto que hay que implantar para que dé algo; por sí solo es completamente estéril: le sirve a los filósofos o tal vez solamente a los historiadores de la filosofía.

Las aplicaciones de conjuntos consideradas por Cantor y Dedekind son pues el fin de la historia del concepto de función y lo que nos interesa es su desarrollo.

Se lee en un libro casi desconocido de 1841:

"En el lenguaje emblemático de los antiguos algebristas, los productos de factores iguales se llamaban indiferentemente potencias, dignidades, o funciones; al vocablo potencia le damos todavía hoy la misma significación, y el de dignidad ha quedado en uso en el latín técnico; pero el término de función ha perdido desde hace mucho tiempo esta acepción particular para tomar otra mucho más general, y cuya generalidad denota uno de los progresos más notables de la abstracción matemática".

El párrafo anterior es el primero del Tratado Elemental de las Funciones y del Cálculo Infinitesimal (1841) de Antonio Agustín Cournot (1801-1877) famoso sobre todo como fundador de la economía matemática con su libro Investigaciones sobre los principios matemáticos de la Teoría de la Riqueza (1838) donde estudia el concepto de condiciones de equilibrio de una economía de mercado, temas que tal vez le valieron el premio Nobel a Arrow y Debreu (Premio Nobel 1983).

Páginas adelante y como prueba de la extraordinaria visión de Cournot: "... Así podría imaginarse una teoría que tuviese por objeto la discusión de las propiedades generales de las funciones; y esta teoría constituiría una rama especial de las matemáticas; en última instancia podría haber formado un cuerpo de doctrina aunque no se hubiese inventado previamente el álgebra; aunque no hubiese sido posible aplicar esta teoría a las funciones algebraicas..."

Volviendo al primer párrafo del libro de Cournot vemos que hace historia de las palabras, disciplina que hoy se pone de moda; es una condición necesaria para hacer la historia de los conceptos. Muchas palabras conservan su significado en un nivel o uso del lenguaje y lo combinan con otro. Así, potencia, dignidad, función, que son términos cercanos en la filosofía escolástica también lo son en nuestro lenguaje ordinario: el funcionario tiene la dignidad y tiene el poder.

El término muy antiguo, aristotélico de potencia se funde con el concepto que representa para nosotros  $x^n$ , probablemente en la cinemática escolástica. Los escolásticos heredan la física de Aristóteles y empiezan su crítica dada la inutilidad de leyes como: "la piedra cae porque su lu-

gar es abajo", "el humo sube porque su lugar es arriba", etc. referentes a los movimientos "naturales". Una ley del movimiento no natural, de Aristóteles, dice que la velocidad es proporcional al cociente de fuerza por resistencia del medio.  $V = kF/R$ , pero si  $F = R$ , la velocidad debe ser nula, y esto lo observa entre otros Thomas Bradwardine en el siglo XIV, y propone una ley según la cual  $(F/R)^2$  produce una velocidad  $2V$ ,  $(F/R)^n$  produce una velocidad  $nV$ , etc.. O sea  $V = k \log(F/R)$ , en nuestra terminología.

La potencia, siendo lo que mueve los cuerpos, según la escolástica (en ausencia del moderno concepto del campo de fuerzas) se identifica así con los productos de factores iguales. Es una explicación parcial plausible del origen de "potencia" en el álgebra.

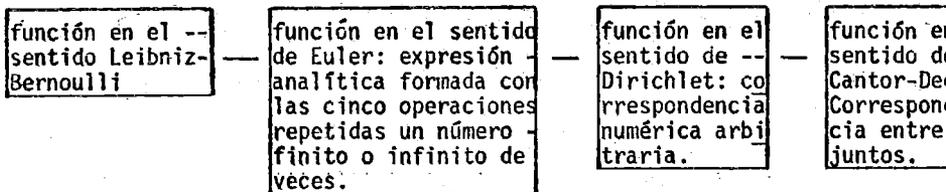
También hay que explicar cómo la "función" de connotación teleológica pasaría a denominar una dependencia y luego una correspondencia. De esto es responsable Leibniz: en 1673, nos dice Bourbaki, Leibniz habla de las "funciones de una curva", "las líneas que desempeñan una función respecto a la curva" como el segmento de la ordenada, el segmento de la abscisa, el segmento de la tangente o la subtangente. La ordenada de la curva más usual es  $y = x^n$ , potencia o función en el sentido de los antiguos y ya que es el segmento más importante determinado por el punto de la curva, su nombre "función" se hace genérico de todos los segmentos considerados al estudiar la curva. Pero el sentido aún es teleológico. Posteriormente Leibniz y Bernoulli, dado que los segmentos asociados con la curva tienen una expresión analítica asociada, hacen extensivo el término "función" a todas las expresiones analíticas. Nótese que aún falta la connotación de "dependencia o correspondencia". James Gregory más o menos al mismo tiempo, es

el primero en hablar de "cantidad analítica" como una que se forma a partir de  $x$ , constantes y las cinco operaciones del álgebra además de "cualquier otra operación imaginable"; esta otra operación imaginable es desde luego la operación del paso al límite que no se había desprendido claramente, y de hecho tardaría mucho en hacerlo. Newton, por otra parte, llama fluyentes a estas cantidades analíticas de Gregory, y en el caso de Newton son siempre y explícitamente dependientes del tiempo. Así se imponen las dos características de una función:

Es una expresión analítica.

Es una correspondencia o dependencia.

Euler mucho después del tiempo de Gregory cambia la frase "toda operación imaginable" por la operación de paso al límite o por la frase "operaciones algebraicas en número finito o infinito". Cuatro etapas en la historia del concepto podemos considerar más o menos como en el diagrama



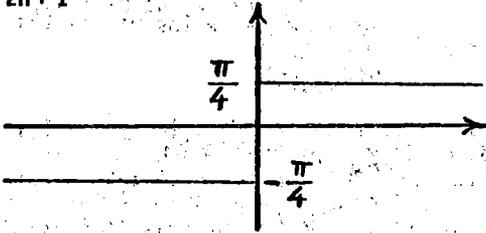
El tránsito de ida y vuelta entre las EXPRESIONES ANALÍTICAS y las CORRESPONDENCIAS NUMÉRICAS, desde temprano se vió que era el problema y que es la historia del análisis.

Ahora, si la definición de Euler parece satisfactoria, ¿qué provocó a Dirichlet a hacer su definición? Fué un tipo de expresión analítica llamado "serie de Fourier", caso particular de la serie trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

En el primer trabajo riguroso sobre las series de Fourier, de Dirichlet, aparece su nueva definición de una función motivada por el siguiente problema

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$  converge en todo punto y su gráfica es como



Ahora, si una función es, como en el sentido de Euler, una sucesión finita o infinita de operaciones algebraicas, entonces

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad x \rightarrow -\frac{\pi}{4}, \quad x \rightarrow \sum \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

obviamente son tres sucesiones de operaciones, o expresiones analíticas diferentes y una misma función, de modo que necesariamente debe ampliarse el concepto a: "una función es una clase de equivalencia de expresiones analíticas"; pero esta definición tampoco es posible porque entonces las dos funciones constantes escritas y claramente también todas las funciones constantes estarían en la misma clase de equivalencia, en contra del supuesto obvio que las funciones constantes no pueden identificarse entre sí. Si se limitaran los dominios se daría por resuelto el problema más difícil que consiste en determinar en qué parte de la recta real tienen sentido las expresiones analíticas. Así se ve que es imposible identifi-

car los conceptos "función" y "expresión analítica"; se puede hacer la observación de que antes de Euler se conocía el caso de  $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$  para  $-1 < x < 1$ ; pero aquí las expresiones coinciden donde no divergen. Donde una expresión diverge no importa lo que pase con la otra.

Dirichlet, entonces, de la definición: función es una correspondencia numérica dada por una expresión analítica, suprime la segunda parte. Dió el ejemplo de la función característica de los racionales que llamó una correspondencia numérica "arbitraria".

Hankel en 1870 discutió y comparó detalladamente las definiciones que se habían dado de las funciones, en su escrito: "Investigación de las funciones infinitamente oscilantes y discontinuas (infinidad de max/min y de disc.). Una contribución a la determinación del concepto de función en general". En su trabajo, Hankel demuestra que el concepto de función según Dirichlet no es más general que el de Euler, en contra de las apariencias. Da una expresión analítica para la función característica de los

racionales como  $f(x) = \frac{\sum \frac{1}{n^s}}{\sum \frac{1}{n^s} \left[ \frac{1}{\phi(\sin nx \pi)} \right]^2}$ ,  $s > 1$ ; una expresión analítica

más simple es  $f(x) = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n(\sin^2 m \pi x)$  (Lawrence M. Graves, The Theory of Functions of Real Variables) (Hobson, The Theory of Functions of real variables). Entonces, Hankel propone una teoría de las funciones que se base en las analíticas de variable compleja, y prácticamente abolir la teoría independiente de funciones de variable real.

El efecto fué el opuesto como suele suceder. A partir de Hankel existe una teoría independiente de las funciones de variable real. En cuanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum \theta(-1(-1)^{\theta})}{n \pi} \text{sen } 2n x \pi$$

donde en lugar de  $\theta$  se ponen todos los divisores de  $n$ , pero la función no es acotada en ningún intervalo (luego no es sumable)." Un poco más adelante plantea el problema que él no resuelve, el problema de LA UNICIDAD DE LA REPRESENTACION. Este es el problema con el que Cantor inicia las investigaciones que lo conducirán a la teoría de los números transfinitos.

- - -

Paul Du Bois Reymond halló un ejemplo, que también buscaba Riemann, de una función continua y monótona por tramos fuera de todo intervalo que contiene 0, y que no es representable por su serie de Fourier. También estudió el problema de cómo pasar de las funciones continuas a las totalmente discontinuas y propuso un método que influyó en Cantor; para algunos historiadores son los trabajos de Du Bois Reymond los que sugirieron a Cantor sus primeras investigaciones en la teoría de conjuntos puntuales. Las discontinuidades de las funciones siguientes conforman conjuntos importantes en el desarrollo de las ideas de Cantor y fueron estudiadas por Du Bois Reymond:  $y = \text{sen } 1/x$ ,  $w = \text{sen } 1/y$ ,  $z = \text{sen } 1/w, \dots$ . Los teoremas de Georg Cantor referentes a la representación de las funciones por series trigonométricas son los siguientes:

- I. Si una serie trigonométrica converge en todo un intervalo, entonces sus coeficientes tienden a cero.
- II. Si una serie trigonométrica converge a cero en todo punto de  $[0, 2\pi]$ , entonces todos sus coeficientes son nulos.
- III. Si una serie trigonométrica converge a cero en todo punto del interva-

lo  $[0, 2\pi]$  exceptuados los puntos de un conjunto finito donde la serie puede o no ser convergente, entonces todos sus coeficientes son nulos.

IV. Como III, exceptuado un conjunto reducible de  $n$ -ésima especie.

V. Como IV, exceptuando un conjunto reducible.

A Cantor se debe la definición de la operación de derivación, y de conjunto de  $n$ -ésima especie, si su enésimo derivado es finito, o bien  $A^{(n+1)} = \phi$ . El conjunto de discontinuidades de la función  $y = \text{sen} \frac{1}{\text{sen} \frac{1}{x}}$  por ejemplo, es de segunda especie. Interesado en la derivación de conjuntos que él esperaba que le dieran la clave del paso de los conjuntos continuos o los discretos, construye un conjunto como  $A$ , tal que  $A \cap [1/(n+1), 1/n]$  es de  $n$ -ésima especie y luego  $A^{(n+1)} \cap [1/(n+1), 1] = \phi$ , luego  $\bigcap_{n=0}^{\infty} A^{(n)} = \phi$ . Define  $\bigcap_{n=0}^{\infty} A^{(n)} = A^{(\infty)}$  pero  $A^{(\infty)}$  es derivable:  $A^{(\infty)}$  se define como  $A^{\infty+1}$ . Renuncia al mismo símbolo  $\infty$  ya asociado históricamente a las situaciones más problemáticas del análisis, el cálculo con series divergentes del siglo XVIII, y lo sustituye por la omega,  $\omega$ . Guiado pues por el problema de los conjuntos de unicidad para las series trigonométricas considera la famosa sucesión de los números transfinitos  $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots, \omega, \omega+1, \dots, \omega+n, \dots, 2\omega, \dots, n\omega, \dots, \omega^2, \omega^2+1, \omega^2+n, \dots, \omega^2+\omega, \dots, \omega^2+2\omega, \dots, 2\omega^2, \dots, n\omega^2+m\omega+k, \dots, a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n, \dots, \omega^\omega, \omega^{\omega+1}, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$ .

Le escribe a Dedekind (pag. 88, "Documentos..."): "Realmente no sé que podría retenerme en esta actividad de formar nuevos números enteros, pues se ha visto que para el progreso de la ciencia ha llegado a ser deseable y hasta indispensable la introducción de una más entre esas clases innume-

a las funciones "monstruo", es de Weierstrass el trabajo más importante y pionero: en 1861, según H.A. Schwartz, construyó una función continua en todo punto y derivable en ninguno. El artículo, de la mayor importancia histórica, aparece en "Documentos..." cap. VIII. Allí aparte de la función analizada, el mismo Weierstrass hace referencia a la función que debía tener las mismas propiedades, según Riemann: de hecho, Weierstrass la considera demasiado difícil y tan sólo en 1970, Joseph Gerver demostró que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ , la función propuesta por Riemann, sí tiene derivadas en los puntos  $\frac{2p+1}{2q+1} \pi$ ,  $p, q$  enteros. La función de Weierstrass demostraba antes que Hankel publicara su estudio que las funciones según Euler podían ser arbitrarias mucho más allá de lo imaginable. El trabajo de Weierstrass se publicó hasta 1872.

Riemann es considerado el matemático más original del siglo XIX. Sus trabajos, huelga decirlo motivaron los de Hankel y Weierstrass ya mencionados y directamente también los de Cantor que nos interesa considerar. En su "Habilitationsschrift": "Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica" generaliza los resultados de Dirichlet que son condiciones suficientes para la representación de una función como serie de Fourier, a saber que sea continua por tramos, que sea monótona por tramos y que en las discontinuidades se le dé el valor promedio.

Riemann quiere encontrar condiciones suficientes para el caso de una infinidad de discontinuidades, y para ello tiene que inventar la que resulta ser la primera integral del análisis moderno, porque los coeficientes de una serie de Fourier son integrales.

En ese trabajo da dos ejemplos capitales:

$\sum \frac{(nx)}{n^2}$  discontinua en un conjunto denso de puntos de (0,1) y aún así integrable.  $(x)$  es el entero más cercano.

$\sum \frac{(nx)}{n}$  no integrable, y sin embargo representable como serie trigonométrica.

Textualmente dice: "Cuando Fourier, en uno de sus primeros trabajos sobre la Teoría del Calor, presentado a la Academia de Ciencias en 1807 pronunció por vez primera esta proposición, que una función dada (gráficamente) de manera completamente arbitraria, podía expresarse por medio de una serie trigonométrica, esta aseveración sorprendió tanto al anciano Lagrange que protestó de la manera más formal."

En otro pasaje: "Las funciones a las que no se aplican los resultados de Dirichlet no se encuentran en la naturaleza... pero la aplicación de las series de Fourier no se limita a las investigaciones físicas; se les encuentra también en una rama de las matemáticas puras, la teoría de números, y aquí son precisamente las funciones que no consideró Dirichlet las más importantes."

Y en otro pasaje puede leerse: "Así como se vio que para una función integrable siempre, la serie de Fourier puede no ser convergente, así también se pueden indicar funciones que nunca son integrables, y para las cuales la serie converge para una infinidad de valores en cualquier intervalo

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n}$  : esta función existe para todo valor racional de  $x$  y está representada por la serie trigonométrica

rables de números y esto es lo que, me parece, ocurre en la teoría de conjuntos y tal vez también en un campo mucho más vasto; por lo menos sin esta extensión ya no puedo avanzar y con ella obtengo numerosos resultados completamente inesperados".

Para su numeración transfinita (desecha el término de "infinito"), Cantor definió suma y multiplicación, estudió las propiedades asociativas, etc., definió números primos y estableció la descomposición no única de todo número en primos.

Pero lo que verdaderamente esperaba era encontrar el paso de lo discreto, lo contable, a lo continuo. Creía literalmente que se podrían contar los puntos de una recta continua con esta numeración. La sucesión escrita antes representa todavía un conjunto numerable pero logró demostrar que los números de la segunda clase, los ordinales de conjuntos numerables constituyen un conjunto no numerable. No logró, sin embargo, demostrar que la potencia de ese conjunto es la del continuo, y ahora sabemos que ello es imposible en las teorías axiomáticas conocidas. Definió numerosos "gigantes" como  $\lim\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\} = \epsilon_0$ . Los números  $\epsilon$  o gigantes son todavía de la segunda clase y los números  $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}$ , son primos.

La aritmética transfinita cardinal, complementaria, menos sofisticada, apareció más tarde; debe comprenderse que el concepto de punto de acumulación del que obtuvo su operación de derivación de conjuntos y por ende la sucesión transfinita, era un concepto ya bien cimentado por Weierstrass. De hecho el primero y más importante teorema de la topología de conjuntos de puntos es el de Bolzano-Weierstrass: todo conjunto infinito acotado de un espacio euclidiano tiene un punto de acumulación.

Por el contrario, el concepto fundamental de la aritmética cardinal de "potencia", de "correspondencia biunívoca", aunque ya antes aplicado por Galileo a los enteros cuadrados, había quedado en el baúl de las "paradojas del infinito" (como también las aplicaciones biunívocas de segmentos de diferente longitud, de Bernhard Bolzano) o de las curiosidades filosófico-matemáticas. De ahí que Cantor tardara en preguntarse ¿cuántos?, respecto de los conjuntos infinitos cuyas propiedades le preocupaban desde su tercer teorema de unicidad.

El teorema de unicidad planteaba naturalmente la pregunta ¿qué tan numeroso puede ser un conjunto de unicidad?, ¿qué tan condensado?

Al problema de condensación respondió con la operación de "derivación de conjuntos" a la pregunta "¿cuántos son?" con la noción de potencia. Y requirió de una audacia sin precedente para comparar el continuo con el conjunto de los enteros.

Pero Cantor jamás precisó el momento o circunstancia en que lo empezó a considerar; al contrario del origen de la numeración ordinal que él sitúa cuando descubre la derivación de conjuntos. El historiador Jourdain que correspondía con Cantor a principios de este siglo, insistió en conocer el origen de la idea de potencia de los conjuntos, pero Cantor contestó con evasivas: "En lo tocante a los números transfinitos de orden, me parece que ya tenía una idea en 1871. El concepto de numerabilidad lo formé en 1873".

El resultado sobre la no numerabilidad de los reales, capital, lo esconde por razones que están perfectamente claras en su correspondencia con Dedekind, en un artículo de 1874: "Sobre una propiedad de todos los números

algebraicos reales". En este artículo demuestra que los algebraicos son un conjunto numerable, y "de paso" que los números reales constituyen un conjunto no numerable.

La historia de sus descubrimientos se desenvuelve de la manera más nítida en la correspondencia Cantor-Dedekind (véase "Documentos..." pags. 38 y siguientes).

Ignorando por un momento que Cantor demostró la igualdad de las potencias de los espacios euclidianos iniciando así el debate sobre la teoría de la dimensión y de la invariancia de la dimensión, se puede preguntar por qué se da más crédito a Cantor en la creación de la topología de conjuntos sabiendo que Riemann fué el primero en redefinir la topología de un espacio, las superficies de Riemann, sabiendo que Hausdorff fué quien formuló la definición de los espacios topológicos, que Weierstrass enunció el primero y más importante de los teoremas de la topología de conjuntos de puntos, y recordando que Hankel y otros hallaron métodos de consideración de singularidades para construir las funciones más extrañas.

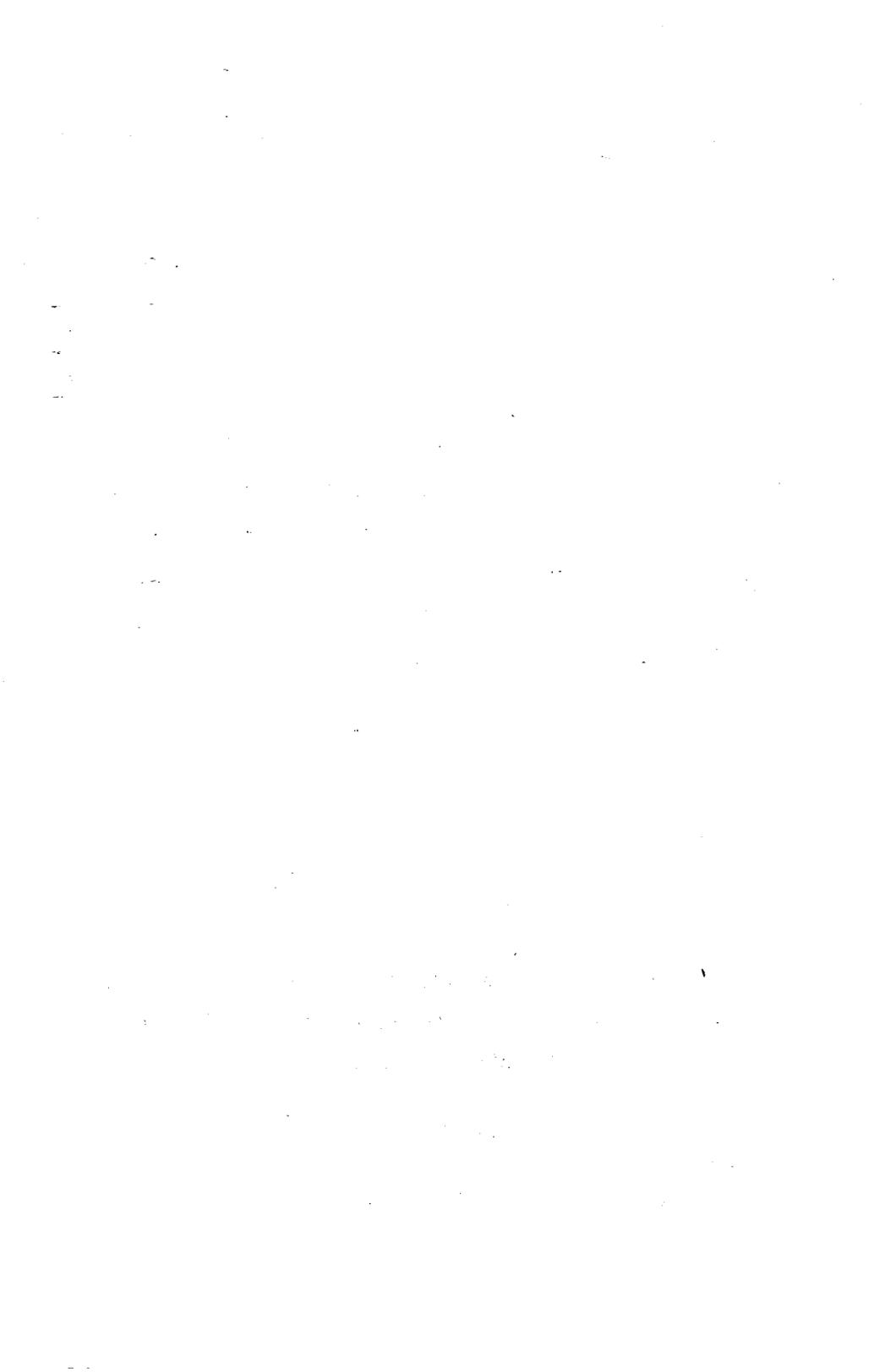
Cantor precisamente, separó el dominio de la función y fijándose exclusivamente en el eje  $x$  definió operaciones sobre los conjuntos de puntos, cerradura, interior, derivación, las requeridas para aclarar muchos problemas funcionales hasta entonces oscurecidos por la insistencia en verlos como problemas de las gráficas e inclusive de sus expresiones analíticas.

Es un esbozo de algoritmo que inventó con la elevada finalidad de hallar la piedra filosofal de las matemáticas, el paso de lo discreto a lo continuo. En este esfuerzo, la topología de conjuntos de puntos salió madura de las manos de Cantor; ejemplo de ello es su teorema de que los conjuntos

perfectos no son numerables.

Es ya bastante conocida la historia de la topología de conjuntos puntuales, o la teoría de la dimensión, después de Cantor, así como la teoría de conjuntos, que entró en crisis muy pronto. No es el caso, sin embargo, de la teoría de los conjuntos de unicidad para las series trigonométricas, punto de partida del genial investigador. Vió claramente que respecto esos conjuntos había que contestar preguntas como ¿cuántos y en qué sentido de "cuántos", son los elementos del conjunto? ¿cómo se distribuyen en la recta y relativamente entre sí, (topología)? ¿cuánto mide el conjunto?. Para esta pregunta no halló la teoría correspondiente, pero sus trabajos inspiraron a Lebesgue, quién se inició con el problema de la invariancia de la dimensión. ¿Cuántos son? Antes de 1900, Young demuestra que todo conjunto numerable es de unicidad. ¿Cuánto mide el conjunto? Menchof, en 1916 demuestra la existencia de conjuntos de multiplicidad y medida nula. Todo conjunto de medida positiva es de multiplicidad.

En 1922 Rajman demuestra que el conjunto ternario de Cantor es de unicidad. Se inicia la investigación sobre los conjuntos perfectos y no hace mucho se obtuvo un teorema sorprendente. Sea  $A$  un conjunto perfecto que se descompone en dos partes homotéticas a  $A$ , con la razón  $0 < \xi < 1/2$ . Entonces si  $\theta = \frac{1}{\xi}$  es un número algebraico (raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros) tal que  $\theta > 2$ , tal que todos sus otros conjugados sean de módulo menor que 1, entonces el conjunto  $A$  es de unicidad; en el otro caso, es de multiplicidad.



ESTE LIBRO SE IMPRIMIÓ EN JUNIO DE 1984  
EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS DEL  
CINVESTAV-IPN

SE TIPARON 500 EJEMPLARES

AVE. I.P.N. NO. 2508 CP. 07000.



